J. reine angew. Math. **693** (2014), 1–149
DOI 10.1515/crelle-2012-0089

Journal für die reine und angewandte Mathematik

L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I

Par *Joseph Ayoub* à Zürich

Résumé. C'est le premier volet d'une série de deux articles visant à construire et étudier des groupes de Galois motiviques dans le cadre des motifs triangulés. On développe d'abord un formalisme général permettant d'associer à un foncteur monoïdal f, satisfaisant à certaines conditions naturelles, une algèbre de Hopf dans la catégorie monoïdale but de f. Ce formalisme sera ensuite appliqué à la réalisation de Betti des motifs de Morel–Voevodsky sur un corps de base k muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. On obtient ainsi une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma)$ de la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. En utilisant le théorème de comparaison entre cohomologie singulière et cohomologie de De Rham, on obtient une description explicite de l'algèbre unitaire $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma) \otimes \mathbb{C}$ montrant en particulier que le complexe $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma)$ n'a pas d'homologie en degrés strictement négatifs. On en déduit une structure de $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf sur le 0-ième groupe d'homologie de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma)$ dont le spectre sera baptisé le groupe de Galois motivique.

This is the first article of a series of two, aiming at constructing and studying motivic Galois groups in the context of triangulated motives. We first develop a general formalism that allows us to associate to a monoidal functor f, satisfying some natural conditions, a Hopf algebra in the target category of f. This formalism is then applied to the Betti realization of Morel–Voevodsky motives over a base field k endowed with a complex embedding $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. This gives a Hopf algebra $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma)$ in the derived category of $\mathbb{Q}$-vector spaces. Using the comparison theorem between singular and de Rham cohomology, we obtain an explicit description of unitary algebra $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma) \otimes \mathbb{C}$ showing in particular that the complex $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma)$ has no homology in strictly negative degrees. We deduce from this a structure of a Hopf algebra on the zeroth homology of $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma)$ whose spectrum will be called the motivic Galois group.

L'auteur a bénéficié du soutien partiel du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet no. 2000201-124737/1.

Table des matières

Introduction

Dans cet article et celui qui lui succède [8], nous développons une théorie inconditionnelle du groupe de Galois motivique d'un corps de caractéristique nulle. Notre théorie s'inscrit naturellement dans le cadre des motifs de Morel–Voevodsky et ne nécessite aucune construction nouvelle de « motifs ». De plus, nous ne contournons pas les grandes conjectures (conjectures standards, existence d'une t-structure motivique, etc.) mais nous les reformulons en partie à l'aide de certaines de nos constructions (cf. section 2.4). Nous obtenons entre autres une description explicite de l'algèbre des fonctions sur le groupe de Galois motivique en termes de cycles algébriques.

Dans cette introduction, nous donnerons un aperçu de l'article en essayant de le situer par rapport aux travaux antérieurs sur le groupe de Galois motivique, notamment l'approche originale mais conjecturale de Grothendieck, l'approche inconditionnelle de Y. André [1] et enfin l'approche de Nori (à ce jour, Nori n'a rien publié sur le sujet mais le lecteur trouvera dans [29, §3.3] une exposition de sa construction).

Une dualité de Tannaka faible. Comme toutes les constructions de groupes de Galois motiviques, la nôtre est basée sur une sorte de dualité de Tannaka qui fait l'objet de la section 1. Strictement parlant, il ne s'agit pas d'une dualité. En effet, la différence essentielle entre notre formalisme et le formalisme Tannakien réside dans l'absence d'une dualité. Soyons plus précis : supposons donnée une catégorie tensorielle Λ-linéaire $\mathcal{A}$ munie d'un foncteur monoïdal f dans la catégorie des Λ-espaces vectoriels (ici, Λ est un corps de caractéristique nulle). La théorie de Tannaka (cf. [41]) fournit des conditions nécessaires et suffisantes garantissant que $\mathcal{A}$ est, à équivalence près, la catégorie des représentations d'un pro-Λ-schéma en groupe affine. Ce dernier, noté $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(f)$, est obtenu en prenant les automorphismes monoïdaux du foncteur f à coefficients dans les Λ-algèbres. On a donc une équivalence de catégories

$$\mathcal{A} \simeq \mathbf{Rep}\big(\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(f)\big) \tag{1}$$

qui, pour des raisons évidentes, est considérée comme un « isomorphisme de dualité ». Les conditions d'application de la dualité de Tannaka sont, il le faut bien, très restrictives. On demande entre autres que $\mathcal{A}$ est abélienne et que le foncteur f est fidèle. Si au lieu de chercher une équivalence du type (1), on se contente d'un foncteur universel

$$\mathcal{A} \to \mathbf{Rep}(\mathbf{G}),$$

on obtient en revanche un formalisme qui s'applique presque tout le temps ! Voici le type de résultats que nous obtiendrons dans la section 1 :

> Soit Λ un corps et notons $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ la catégorie des Λ-espaces vectoriels de dimension quelconque. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie monoïdale symétrique Λ-linéaire munie d'un foncteur monoïdal Λ-linéaire $f : \mathcal{M} \to \mathrm{Mod}(\Lambda)$. Supposons que f admet un adjoint à droite g qui commute aux sommes quelconques. [1] Il existe alors une

---

[1] Sous ces conditions, il est immédiat que l'hypothèse 1.20 est vérifiée avec e l'unique (à isomorphisme près) foncteur Λ-linéaire commutant aux sommes et envoyant Λ sur l'objet unité de $\mathcal{M}$.

bialgèbre $\mathrm{H}(f)$ et un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{coMod}(\mathrm{H}(f)) \arrow[d] \\ & \mathrm{Mod}(\Lambda), \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{coMod}(\mathrm{H}(f))$ est la catégorie des comodules sur $\mathrm{H}(f)$ et la flèche verticale est le foncteur d'oubli. De plus, la bialgèbre $\mathrm{H}(f)$ est universelle pour cette propriété.

Par ailleurs, une condition simple sur l'adjoint à droite g assure que $\mathrm{H}(f)$ est une algèbre de Hopf. Dans ce cas, la catégorie $\mathrm{coMod}(\mathrm{H}(f))$ s'identifie à $\mathbf{Rep}(\mathbf{G})$ avec $\mathbf{G} = \mathrm{Spec}(\mathrm{H}(f))$ et nous obtenons notre version *faible* de la dualité de Tannaka. Il existe également une version graduée de l'énoncé précédent qui s'applique au foncteur de réalisation de Betti pour fournir l'algèbre de Hopf motivique. Toutefois, pour d'autres applications (comme celles qui seront données dans [8]) nous sommes amenés à généraliser encore la situation.

En effet, nous partons d'un foncteur monoïdal symétrique $f : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ admettant un adjoint à droite g et une section monoïdale e. Nous supposons que le morphisme de coprojection $g(E) \otimes e(E') \to g(E \otimes fe(E'))$ est inversible pour tout $E, E' \in \mathcal{E}$. Sous ces conditions, nous montrons que l'objet $\mathrm{H} = fg(\mathbb{1}) \in \mathcal{E}$ possède une structure naturelle de bialgèbre dans $\mathcal{E}$. Les constructions et les vérifications pénibles inhérentes à cet énoncé occupent la section 1.2. Dans la section 1.3, nous vérifions que $f(A)$ est naturellement un H-comodule pour tout objet $A \in \mathcal{M}$ obtenant ainsi le foncteur universel de $\mathcal{M}$ dans une catégorie de comodules sous une bialgèbre dans $\mathcal{E}$. Nous faisons ensuite le lien avec les endomorphismes du foncteur f (qui ne préservent pas nécessairement la structure monoïdale). Le but de la section 1.4 est de montrer que H est une algèbre de Hopf si le morphisme évident $g(E) \otimes A \to g(E \otimes f(A))$ est inversible pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $E \in \mathcal{E}$. La section 1.5 est consacrée à quelques propriétés de fonctorialité de notre construction.

Comparaison avec le théorème Tannakien de Nori. Le concept d'une dualité de Tannaka faible a été considéré auparavant par M. Nori (cf. [29, §3.3]). Soit Λ un corps et soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique munie d'un foncteur monoïdal symétrique R à valeurs dans la catégorie $\mathrm{Mod}_f(\Lambda)$ des Λ-espaces vectoriels de dimension finie. À cette donnée, Nori associe une Λ-bialgèbre $\mathrm{N}(R)$ et un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{coMod}_f(\mathrm{N}(R)) \arrow[d] \\ & \mathrm{Mod}_f(\Lambda), \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{coMod}_f(\mathrm{N}(R))$ est la catégorie des comodules sur $\mathrm{N}(R)$ de dimension finie sur Λ et la flèche verticale est le foncteur d'oubli. De plus, la bialgèbre $\mathrm{N}(R)$ est universelle pour cette propriété. C'est le *théorème Tannakien de Nori*. En fait, Nori considère une situation beaucoup plus générale où $\mathcal{C}$ est seulement un diagramme.

Bien que similaires dans leurs formulations, le théorème Tannakien de Nori et le théorème énoncé dans le paragraphe précédent sont différents. En effet, nous considérons un foncteur f dans la catégorie des Λ-espaces vectoriels de dimension quelconque et qui admet un adjoint à droite g commutant aux sommes infinies. Un tel foncteur ne vérifie donc pas les conditions d'application du théorème de Nori. Réciproquement, un foncteur R à valeurs dans les Λ-espaces vectoriels de dimension finie possède rarement un adjoint à droite. De plus, le lecteur familier avec le théorème Tannakien de Nori se convaincra de lui-même que notre approche est très différente de celle de Nori. En effet, notre stratégie consiste à munir l'objet $fg(\Lambda)$ ($fg(\mathbb{1})$ dans le cas général) d'une multiplication et d'une comultiplication explicites et de vérifier *à la main* toutes les propriétés requises.

Le lecteur peut aussi s'interroger sur nos motivations pour développer notre dualité de Tannaka faible. Nous en avons au moins deux. Premièrement, notre formalisme Tannakien s'applique à $\mathcal{E}$, la catégorie but du foncteur f, une catégorie monoïdale quelconque. Ceci n'est pas le cas de la construction de Nori qui ne semble pas se généraliser au delà du cas où $\mathcal{E}$ est une catégorie abélienne. Or, dans [8] nous aurons à considérer le cas où $\mathcal{E}$ est une catégorie triangulée de motifs. Deuxièmement, dans notre approche, l'adjoint à droite g joue un rôle primordial et permet d'expliciter toutes les structures. Par exemple, on dispose d'une formule pour $\mathrm{H}(f)$. C'est l'objet $fg(\mathbb{1}) \in \mathcal{E}$, où $\mathbb{1} \in \mathcal{E}$ est l'objet unité de la structure monoïdale. De plus, la comultiplication de $\mathrm{H}(f)$ est décrite explicitement, modulo des isomorphismes évidents, en termes de l'unité de l'adjonction (f, g) et de l'inverse d'un morphisme de coprojection. Il en est de même de l'antipode de $\mathrm{H}(f)$ lorsqu'on sait montrer que cette dernière existe. Le fait qu'on puisse expliciter toutes les structures de la bialgèbre $\mathrm{H}(f)$ nous permettra dans la suite de donner une description relativement concrète de l'algèbre de Hopf motivique et de sa comultiplication. Ceci est, nous semble-t-il, l'une des caractéristiques importantes de ce travail.

Le groupe de Galois motivique. Fixons un corps k muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ et un anneau de coefficients Λ. Nous notons $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$ (resp. $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$) la catégorie des motifs (resp. motifs effectifs) sans transferts sur k à coefficients dans Λ. On dispose d'un foncteur de réalisation de Betti

$$\mathsf{Bti}^* : \mathbf{DA}(k, \Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda),$$

où $\mathbf{D}(\Lambda)$ est la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(\Lambda)$. La variante effective de ce foncteur est notée $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}$. Ils admettent des adjoints à droite notés Bti_* et $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*$ respectivement.

Nous montrons dans la section 2.1 que les deux foncteurs Bti^* et $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}$ vérifient les conditions d'application de la dualité de Tannaka faible développée dans la section 1. Nous obtenons donc deux bialgèbres dans $\mathbf{D}(\Lambda)$ qu'on notera respectivement $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$. En fait, $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ est une algèbre de Hopf. De plus, elle s'obtient à partir de $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ en inversant un élément canonique $\varsigma \in \mathrm{H}_0(\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda))$, i.e., on a $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \simeq \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)[\varsigma^{-1}]$. [2)] Ces constructions font l'objet de la section 2.1.

Pour obtenir un « vrai » groupe de Galois motivique il faut invoquer un résultat de la section 2.3.1. Plus précisément, dans ladite section, nous utilisons le théorème de comparaison de Grothendieck entre cohomologie singulière et cohomologie de de Rham [20] pour construire un quasi-isomorphisme entre $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{C})$ et un complexe explicite de formes différentielles. Il se trouve que ce dernier complexe est nul en degrés homologiques strictement négatifs, ce qui entraîne que $\mathrm{H}_n(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)) = 0$ et $\mathrm{H}_n(\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)) = 0$ pour $n < 0$. Ceci permet de conclure que $\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda))$ et $\mathrm{H}_0(\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda))$ sont naturellement des Λ-bialgèbres ; la première est en fait une Λ-algèbre de Hopf. Ceci dit, nous posons

$$\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) = \mathrm{Spec}(\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda))),$$

---

2) La situation est semblable au cas de la bialgèbre $k[(x_{ij})_{1\le i,\, j\le n}]$ dont le spectre est l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$ et l'algèbre de Hopf $k[(x_{ij})_{1\le i,\, j\le n}][\det^{-1}]$ dans le spectre est le groupe linéaire $\mathbb{G}\mathrm{l}_k(n)$.

un pro-schéma en groupe affine sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. C'est le groupe de Galois motivique de k (associé au plongement σ).

Comparaison avec d'autres constructions de groupes de Galois motiviques. Ésquissons l'approche originale mais conjecturale de Grothendieck. Si on cherche à appliquer la dualité de Tannaka aux motifs de Chow, on est d'abord obligé de passer à l'équivalence homologique (pour s'assurer que la réalisation de Betti est fidèle) et on doit ensuite démontrer que la catégorie des motifs pures pour l'équivalence homologique est abélienne. La seule méthode connue à ce jour pour faire cela repose sur une partie des conjectures standards. Si l'on savait que l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique, on pourrait utiliser [24] pour montrer que cette catégorie est abélienne et même semi-simple. On obtient ainsi la construction conditionnelle du groupe de Galois motivique, en fait de son plus grand quotient réductif.

Notre construction ressemble beaucoup à la construction conditionnelle de Grothendieck. Cependant, elle diverge au moins à deux endroits :

1. au lieu d'utiliser la catégorie (conjecturalement abélienne) des motifs pures pour l'équivalence homologique, nous utilisons la catégorie triangulée de tous les motifs mixtes $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$,
2. au lieu d'utiliser la dualité de Tannaka, on utilise la dualité de Tannaka faible.

De plus, notre construction fournit le groupe de Galois motivique tout entier et pas seulement son plus grand quotient réductif.

En essayant d'« imposer » certaines des conjectures standards, plusieurs mathématiciens ont réussi de réaliser inconditionnellement la construction de Grothendieck. L'idée commune à ces constructions est de remplacer la catégorie des motifs pures pour l'équivalence homologique par une autre catégorie qui lui est conjecturalement équivalente mais pour laquelle il est possible de vérifier toutes les conditions d'application de la dualité de Tannaka. Parmi ces constructions notons celle de Deligne [15] basée sur la notion de « cycle de Hodge absolu » et celle d'André [1] basée sur la notion de « cycle motivé ». Une troisième construction, toutefois moins naturelle, est due à André et Kahn [3]. La question suivante semble accessible.

Question. Est-ce que le groupe de Galois motivique d'André est le plus grand quotient réductif de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$?

À notre connaissance, la seule construction de groupe de Galois motivique « total » antérieure à la nôtre est celle de Nori. Elle est basée sur son théorème Tannakien appliqué à un diagramme $\mathcal{D}(k)$ qui n'est pas une catégorie. Le diagramme $\mathcal{D}(k)$ a pour sommets les quadruplés (X,Y,n,m) avec $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$, X un k-schéma de type fini et $Y\subset X$ un sous-schéma fermé. Les flèches dans $\mathcal{D}(k)$ sont de trois sortes :

1. des morphismes de paires à n et m fixés,
2. une flèche $(X,Y,n,m)\to(Y,Z,n-1,m)$ pour toute chaîne de sous-schémas fermés $Z\subset Y\subset X$,
3. une flèche $(X,Y,n,m)\to(\mathbb{P}^1_X,\mathbb{P}^1_Y\cup\{\infty\}\times X,n+2,m+1)$.

Le (pré-)foncteur $R:\mathcal{D}(k)\to\mathrm{Mod}_f(\mathbb{Q})$ associe à (X,Y,n,m) le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{H}_n((X(\mathbb{C}),Y(\mathbb{C})),\mathbb{Q}(m))$. Le théorème Tannakien de Nori appliqué à R fournit une algèbre de

Hopf $\mathscr{H}_{\mathrm{Nori}}(k, \sigma, \mathbb{Q})$ et, en passant au spectre, un pro-schéma en groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{Nori}}(k, \sigma, \mathbb{Q})$. Nous pensons savoir répondre par l'affirmative à la question suivante, mais nous ne rédigerons pas les détails ici.

Question. Est-ce que $\mathbf{G}_{\mathrm{Nori}}(k, \sigma, \mathbb{Q})$ est isomorphe à $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Q})$?

Là encore, le lecteur peut s'interroger sur les avantages de notre construction par rapport à celle de Nori. Notre construction est mieux adaptée à la théorie des motifs suivant Morel et Voevodsky, et nous pouvons donc disposer de tout l'arsenal motivique développé dans les dix dernières années pour étudier le groupe de Galois motivique. Ceci sera exploité dans le présent travail à plusieurs reprises. Par exemple, en utilisant la formule $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) = \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda$ et en calculant dans les catégories des spectres motiviques, nous arrivons à décrire $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ comme un complexe de cycles explicite. Une telle description de l'algèbre de Hopf motivique est probablement impossible à partir de la construction de Nori. Voici un deuxième avantage : notre construction fournit une algèbre de Hopf dans $\mathbf{D}(\Lambda)$ et l'algèbre de Hopf de Nori est au mieux l'homologie en degré zéro. Même si on conjecture que les $\mathrm{H}_n(\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda))$ sont nuls pour $n > 0$, il est important d'avoir défini ces objets. En effet, une preuve de l'annulation de ces groupes sera à notre avis un grand pas vers la conjecture de Beilinson–Soulé et l'existence de la t-structure motivique.

Notons enfin une divergence importante entre notre approche et celle de Nori. La construction de Nori repose sur un résultat géométrique : le « basic lemma ». Ce résultat, du à Beilinson et redécouvert plus tard par Nori, affirme que la cohomologie de Betti de certaines paires de k-schémas (X, Y) est nulle sauf en un seul degré. Notre construction du groupe de Galois motivique n'utilise pas le « basic lemma ». Tout au plus, nous utiliserons le théorème de Lefschetz faible via le théorème de comparaison de Grothendieck entre cohomologie singulière et cohomologie de de Rham algébrique.

Description explicite de l'algèbre de Hopf motivique. Un des points importants du présent travail est le « calcul » de l'algèbre de Hopf motivique $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$. Pour expliquer de quoi il s'agit nous avons besoin de quelques notations. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$ le pro-k-schéma des voisinages étales du polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_i| \leq 1\}$ dans la droite affine $\mathbb{A}^n_k$. Pour une définition exacte, nous renvoyons le lecteur à la section 2.2.4. Ces pro-schémas forment un objet cocubique $\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. Pour $c \in \mathbb{N}$, on forme le groupe abélien bicubique $\mathrm{Zy}^c(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})$ donné en bidegré $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ par le groupe des cycles de codimension c dans $\bar{\mathbb{D}}^a_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^b_{\text{ét}}$ qui intersectent proprement toutes les faces. Notons $\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^c(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ le bicomplexe de groupes abéliens associé à ce groupe bicubique. Le théorème 2.139 affirme que le complexe $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$ est quasi-isomorphe à une colimite suivant $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ des complexes

$$\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^{m+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))\big)[-2m-2n].$$

Ceci est à rapprocher de la description de $\mathscr{C}^0(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z})$ comme étant le groupe des cycles de codimension 0 dans le pro-schéma $\bar{\mathbb{D}}^0_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^0_{\text{ét}} = \mathrm{Spec}(\bar{k} \otimes_k \bar{k})$. Modulo l'isomorphisme du théorème 2.139, la multiplication est induite par le produit extérieur des cycles. Pour la description de la comultiplication, nous renvoyons le lecteur au théorème 2.144.

La description explicite de $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{Z})$ repose sur la construction d'un certain modèle du foncteur composé $\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*$ au niveau des catégories de spectres symétriques (cf. section 2.2.5). Cette construction, qui est techniquement plus exigeante que le reste de l'article, est l'objectif de la longue section 2.2. En fait, notre modèle du foncteur $\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*$ est d'un intérêt indépendant du calcul de l'algèbre de Hopf motivique. En effet, nous en avons besoin pour énoncer la conjecture B de la section 2.4 et il est probable que toute tentative sérieuse de prouver cette conjecture devrait passer par une étude approfondie de ce modèle. Comme nous essayerons de le montrer dans la section 2.4, cette conjecture est à la fois très explicite et extrêmement forte. Jointe à la conjecture A (cf. section 2.4), elle devrait entraîner l'existence d'une t-structure motivique et même d'une équivalence de catégories entre la catégorie triangulée des motifs géométriques (à coefficients rationnels) et la catégorie dérivée des représentations de dimension finie de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$.

Périodes formelles. Le lecteur trouvera dans la section 2.3.1 une description du complexe $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C})$ à l'aide d'un complexe de formes différentielles. Notons $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ la colimite des $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^{n}_{\text{ét}})$ suivant $n \in \mathbb{N}$. Les éléments de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ sont des fonctions sur le polydisque fermé de dimension infinie $\bar{\mathbb{D}}^{\infty} = \{(z_1,\ldots,z_n,\ldots),\ |z_i| \leq 1\}$, qui dépendent d'un nombre fini des variables z_i et qui sont algébriques sur le corps $k(z_1,\ldots,z_n,\ldots)$. Pour $I \subset \mathbb{N}$ une partie finie, on note $\mathcal{O}^{(I)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty}) \subset \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ le sous-espace vectoriel des fonctions f qui deviennent nulles lorsqu'on substitue chacune des variables z_i, pour $i \in I$, par $\epsilon \in \{0,1\}$. On a alors un isomorphisme canonique $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C}) \simeq \mathscr{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) \otimes_k \mathbb{C}$ où $\mathscr{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma)$ est le complexe de formes différentielles (de degré infini)

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \bigoplus_{\substack{I\subset\mathbb{N}-\{0\},\\ \mathrm{card}(I)=d}} \mathcal{O}^{(I)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\,\mathrm{d}\hat{z}_I \xrightarrow{\mathrm{d}} \bigoplus_{\substack{I\subset\mathbb{N}-\{0\},\\ \mathrm{card}(I)=d-1}} \mathcal{O}^{(I)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\,\mathrm{d}\hat{z}_I \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots$$
$$\xrightarrow{\mathrm{d}} \bigoplus_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} \mathcal{O}^{(i)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\,\mathrm{d}\hat{z}_i \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\mathrm{d}\hat{z}_{\emptyset}.$$

(Ci-dessus, le symbole $\mathrm{d}\hat{z}_I$ désigne $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}-(I\sqcup\{0\})} \mathrm{d}z_i$ où les $\mathrm{d}z_i$ sont rangés dans l'ordre croissant des i.) Le 0-ième groupe d'homologie du complexe ci-dessus est le quotient

$$\mathbf{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) = \frac{\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})}{\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial z_i} - (f(z_i=1) - f(z_i=0));\ f \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty}),\ i \in \mathbb{N}-\{0\}\right\rangle}.$$

C'est l'anneau des *périodes formelles effectives*. On obtient l'anneau $\mathbf{P}(k,\sigma)$ des *périodes formelles* en inversant l'élément correspondant à la période π. On dispose d'un morphisme canonique $\int : \mathbf{P}(k,\sigma) \to \mathbb{C}$ dont l'image est l'anneau des « vraies » périodes. Lorsque $k = \mathbb{Q}$, ce morphisme est conjecturalement injectif. Dans [26], Kontsevich a introduit la notion de « période abstraite ». Bien que sa définition soit différente de la nôtre, il est plausible que l'anneau des périodes formelles est le même, à isomorphisme près, que celui des périodes abstraites de Kontsevich.

L'algèbre de Hopf motivique $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$ co-agit sur la réalisation de Betti de tout motif et en particulier sur la réalisation de Betti de l'objet $\mathbf{\Omega}_{/k} \in \mathbf{DA}(k,\Lambda)$ qui représente la cohomologie de de Rham algébrique. Or, par construction, nous avons un isomorphisme canonique $\mathbf{P}(k,\sigma) \simeq \mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathbf{\Omega}_{/k}))$. Nous déduisons donc que le groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$ agit naturellement sur l'anneau des périodes formelles. De plus, le pro-k-schéma $\mathrm{Spec}(\mathbf{P}(k,\sigma))$ est un torseur sur le pro-$\mathbb{Q}$-schéma en groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$. Ceci fournit une théorie de Galois pour les périodes formelles qui est un analogue précis et une extension de la théorie de Galois pour $\bar{k}/k$. Si $k = \mathbb{Q}$ et en admettant que $\int : \mathbf{P}(k, \sigma) \to \mathbb{C}$ est injectif, on obtient la théorie de Galois conditionnelle pour les périodes de [2]. Selon Kontsevich [26], ses périodes abstraites sont aussi sujettes à une théorie de Galois sous le groupe de Galois motivique de Nori.

Remerciements. Je tiens à remercier le rapporteur anonyme de cet article et de sa suite [8] pour ses commentaires qui ont contribué à améliorer le texte. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir signalé une erreur embarrassante dans ma formulation initiale de la conjecture B. (J'avais utilisé la catégorie $\mathbf{DA}(k)$ au lieu de sa version étale !)

1. La théorie abstraite : construction d'algèbres de Hopf à partir de foncteurs monoïdaux

Le but de cette section est de décrire une *recette* générale qui permette d'associer à certains foncteurs monoïdaux f des algèbres de Hopf dans la catégorie but de f. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f est la réalisation de Betti (construite dans [7]) mais aussi celui où f est la réalisation analytique rigide (construite dans [6]). Toutefois, les conditions d'application de notre recette sont particulièrement simples et il est probable que notre théorie s'applique dans beaucoup d'autres situations.

Pour simplifier, on se restreint dans ce qui suit aux catégories monoïdales symétriques et unitaires. Ainsi, sauf mention explicite du contraire, une *catégorie monoïdale* sera pour nous une catégorie monoïdale symétrique et unitaire munie d'un objet unité qu'on désignera en général par $\mathbb{1}$. De même, un *foncteur monoïdal* (resp. *pseudo-monoïdal*) est un foncteur monoïdal, symétrique et unitaire (resp. pseudo-monoïdal, symétrique et pseudo-unitaire). On renvoie le lecteur à [4, définition 2.1.85] pour la signification de ces termes.

1.1. Algèbres, coalgèbres, bialgèbres et algèbres de Hopf.

Dans cette section, nous rappelons les notions classiques d'algèbre, de coalgèbre, de bialgèbre et d'algèbre de Hopf dans les catégories monoïdales. On donnera aussi quelques compléments bien connus mais utiles pour la suite.

1.1.1. Algèbres et coalgèbres dans les catégories monoïdales.

On fixe une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. Une *algèbre* de $\mathcal{C}$ est un couple (A, m) formé d'un objet $A \in \mathcal{C}$ et d'une flèche $m : A \otimes A \to A$ (appelée la *multiplication*) telle que $m \circ (\mathrm{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id})$. On dit que (A, m) est *commutative* si $m \circ \tau = m$ avec τ l'isomorphisme de permutation des facteurs de $A \otimes A$. On dit que (A, m) est *unitaire* s'il existe une flèche $u : \mathbb{1} \to A$ telle que $m \circ (\mathrm{id} \otimes u)$ et $m \circ (u \otimes \mathrm{id})$ sont les isomorphismes canoniques $A \otimes \mathbb{1} \simeq A$ et $\mathbb{1} \otimes A \simeq A$. La flèche u est alors uniquement déterminée. Elle est appelée l'*unité* de (A, m). Dualement, on a la notion de *coalgèbre* formée d'un objet $B \in \mathcal{C}$ muni d'une comultiplication $cm : B \to B \otimes B$. Une coalgèbre peut être *cocommutative* ou *counitaire* (avec une *counité* bien déterminée). Clairement, une algèbre de $\mathcal{C}$ est une coalgèbre de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et vice versa.

Les morphismes d'algèbres (resp. de coalgèbres) sont les flèches qui commutent aux multiplications (resp. aux comultiplications). Les morphismes d'algèbres unitaires (resp. de coalgèbres counitaires) commuteront par définition avec les unités (resp. les counités). Pour alléger les notations, nous omettrons souvent de mentionner la multiplication ou la comultiplication lorsqu'on désigne une algèbre ou une coalgèbre.

Remarque 1.1. Soit (A, m) une algèbre de $\mathcal{C}$. On définit une algèbre $(A^{\mathrm{op}}, m^{\mathrm{op}})$ en prenant $A^{\mathrm{op}} = A$ et $m^{\mathrm{op}} = m \circ \tau$ (avec τ l'isomorphisme de permutation des facteurs de $A \otimes A$). L'algèbre $(A^{\mathrm{op}}, m^{\mathrm{op}})$ est appelée l'algèbre *opposée* à (A, m). On définit de même la coalgèbre opposée $(B^{\mathrm{op}}, cm^{\mathrm{op}})$ à une coalgèbre (B, cm). Une algèbre (resp. coalgèbre) est égale à son opposée si et seulement si elle est commutative (resp. cocommutative).

Lemme 1.2. (a) *Soient (A_1, m_1) et (A_2, m_2) deux algèbres dans $\mathcal{C}$. Alors $A_1 \otimes A_2$ est une algèbre pour la multiplication donnée par la composition de*

$$(A_1 \otimes A_2) \otimes (A_1 \otimes A_2) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (A_1 \otimes A_1) \otimes (A_2 \otimes A_2) \xrightarrow{m_1 \otimes m_2} A_1 \otimes A_2.$$

Si A_1 et A_2 sont commutatives, il en est de même de $A_1 \otimes A_2$. Si A_1 et A_2 sont unitaires, il en est de même de $A_1 \otimes A_2$.

(b) *L'énoncé dual pour les coalgèbres est également vrai.*

Démonstration. La preuve est standard. Elle est omise. □

Lemme 1.3. (a) *Soit $t : (\mathcal{C}, \otimes) \to (\mathcal{D}, \otimes)$ un foncteur pseudo-monoïdal. Soit (A, m) une algèbre (unitaire) de $\mathcal{C}$. Alors, $t(A)$ est naturellement une algèbre (unitaire) de $\mathcal{D}$ pour la multiplication donnée par la composition de*

$$t(A) \otimes t(A) \to t(A \otimes A) \xrightarrow{t(m)} t(A).$$

(L'unité de $t(A)$ est donnée par la composition de $\mathbb{1} \to t(\mathbb{1}) \to t(A)$.) Si l'algèbre A est commutative, alors $t(A)$ est également commutative. Enfin, si $t \to t'$ est une transformation naturelle de foncteurs pseudo-monoïdaux, $t(A) \to t'(A)$ est un morphisme d'algèbres (unitaires).

(b) *L'énoncé dual où t est pseudo-comonoïdal et (B, cm) est une coalgèbre (counitaire) est également vrai.*

Démonstration. La preuve est facile. Elle est omise. □

1.1.2. Bialgèbres dans les catégories monoïdales. On fixe une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. Rappelons la définition suivante.

Définition 1.4. Une *bialgèbre* de $\mathcal{C}$ est un triplet (H, m, cm) formé d'une algèbre (H, m) de $\mathcal{C}$ et d'une coalgèbre (H, cm) de $\mathcal{C}$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "cm \otimes cm"'] & H \arrow[r, "cm"] & H \otimes H \\
(H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & & (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[u, "m \otimes m"']
\end{tikzcd}$$

commute. On dit que (H, m, cm) est *commutative* (resp. *cocommutative*) s'il en est ainsi de l'algèbre (H, m) (resp. de la coalgèbre (H, cm)). On dit que (H, m, cm) est biunitaire lorsque (H, m) est unitaire, (H, cm) est counitaire et les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "u"'] & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[d, "u \otimes u"] \\ H \arrow[r, "cm"] & H \otimes H, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "cu \otimes cu"'] & H \arrow[d, "cu"] \\ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{1}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, equal] & H \arrow[d, "cu"] \\ & \mathbb{1}. \end{tikzcd}$$

Une bialgèbre (biuniatire) de $\mathcal{C}$ est naturellement une bialgèbre (biunitaire) de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Les morphismes de bialgèbres sont les flèches qui commutent aux multiplications et comultiplications. Les morphismes de bialgèbres biunitaires commuteront par définition aux unités et counités. Si (H, m, cm) est une bialgèbre (biunitaire), il en est de même de $(H^{\mathrm{op}}, m^{\mathrm{op}}, cm^{\mathrm{op}})$. C'est la bialgèbre opposée à H. Pour alléger les notations, nous omettrons parfois de mentionner la multiplication et la comultiplication lorsqu'on désigne une bialgèbre.

Remarque 1.5. Soit (H, m, cm) un triplet tel que (H, m) est une algèbre (unitaire) de $\mathcal{C}$ et (H, cm) est une coalgèbre (counitaire) de $\mathcal{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (H, m, cm) est une bialgèbre (biunitaire) ;

(ii) la comultiplication $cm : H \to H \otimes H$ est un morphisme d'algèbres (unitaires et de même pour la counité $cu : H \to \mathbb{1}$) ;

(iii) la multiplication $m : H \otimes H \to H$ est un morphisme de coalgèbres (counitaires et de même pour l'unité $u : \mathbb{1} \to H$).

Ci-dessus, on a utilisé la structure de bialgèbre évidente sur l'objet unité de $\mathcal{C}$ ainsi que les structures d'algèbre et de coalgèbre sur $H \otimes H$ décrites dans le lemme 1.2.

Lemme 1.6. *Soient (H_1, c_1, cm_1) et (H_2, c_2, cm_2) deux bialgèbres (biunitaires) de $\mathcal{C}$. Alors $H_1 \otimes H_2$ munie de la multiplication et la comultiplication du lemme* 1.2 *est une bialgèbre (biunitaire). Si H_1 et H_2 sont commutatives (ou cocommutatives), il en est de même de $H_1 \otimes H_2$.*

Démonstration. Étant donnés des morphismes d'algèbres $a_i : A_i \to B_i$ dans $\mathcal{C}$ pour $i \in \{1, 2\}$, on vérifie immédiatement que $a_1 \otimes a_2 : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2$ est un morphisme d'algèbres. Il vient que $cm_1 \otimes cm_2 : H_1 \otimes H_2 \to (H_1 \otimes H_1) \otimes (H_2 \otimes H_2)$ est un morphisme d'algèbres. Pour terminer, il reste à montrer que l'isomorphisme de permutation des facteurs de $H_1 \otimes H_2$ est un morphisme d'algèbres. Ceci est un exercice facile. Les assertions concernant l'unité, la counité, la commutativité et la cocommutativité sont laissées au lecteur. □

Lemme 1.7. *Soit $t : (\mathcal{C}, \otimes) \to (\mathcal{D}, \otimes)$ un foncteur monoïdal. Soit (H, m, cm) une bialgèbre (biunitaire) de $\mathcal{C}$. Alors $t(H)$ est naturellement une bialgèbre (biunitaire) de $\mathcal{D}$ pour la multiplication et la comultiplication définies dans le lemme* 1.3.

Démonstration. Montrons que la comultiplication $t(H) \to t(H) \otimes t(H)$ est un morphisme d'algèbres. Par construction de la multiplication sur $t(H)$, l'isomorphisme $t(H) \otimes t(H) \simeq t(H \otimes H)$ est un isomorphisme d'algèbres. Il suffit donc de voir que $t(cm) : t(H) \to t(H \otimes H)$ est un morphisme d'algèbres. Ceci découle du fait que cm est un morphisme d'algèbres. □

1.1.3. Algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale. Rappelons la définition suivante.

Définition 1.8. Une bialgèbre (H, m, cm) de $\mathcal{C}$ est une *algèbre de Hopf* si elle est biunitaire et s'il existe une flèche $\iota : H \to H$ telle que le diagramme

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rr] & & H \otimes H \arrow[d, "m"] \\ H \arrow[u, "cm"] \arrow[r, "cu"] & \mathbb{1} \arrow[r, "u"] & H \end{tikzcd}$$

commute si la flèche horizontale supérieure est l'un des morphismes : $\iota \otimes \mathrm{id}$ ou $\mathrm{id} \otimes \iota$. Une telle flèche ι est appelée une *antipode* de H.

Une bialgèbre H est une algèbre de Hopf si et seulement si H^{op} est une algèbre de Hopf. En effet, une antipode de H est aussi une antipode de H^{op}. De même, si H_1 et H_2 sont deux algèbres de Hopf d'antipodes ι_1 et ι_2, $H_1 \otimes H_2$ est une algèbre de Hopf d'antipode $\iota_1 \otimes \iota_2$. Étant donné un foncteur monoïdal, symétrique et unitaire t défini sur $\mathcal{C}$ et si H est une algèbre de Hopf de $\mathcal{C}$ d'antipode ι, alors $t(H)$ est une algèbre de Hopf d'antipode $t(\iota)$. Enfin, une algèbre de Hopf de $\mathcal{C}$ est aussi une algèbre de Hopf de la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Pour mieux comprendre l'antipode d'une algèbre de Hopf, on fait appel à la proposition suivante.

Proposition 1.9. (a) *Soient (A, r) une algèbre et (B, s) une coalgèbre dans $\mathcal{C}$. On définit sur l'ensemble* $\hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ *une loi de composition interne en associant à un couple de flèches (a, b) la composition de*

$$(3) \qquad a \bullet b : B \xrightarrow{s} B \otimes B \xrightarrow{a \otimes b} A \otimes A \xrightarrow{r} A.$$

Cette loi est associative. Si A est unitaire et si B est counitaire, la loi de composition ci-dessus admet un élément neutre donné par $e : B \xrightarrow{cu} \mathbb{1} \xrightarrow{u} A$.

(b) *Soient (A, r) une algèbre unitaire et (H, m, cm) une algèbre de Hopf dans $\mathcal{C}$. Soit ι une antipode de H. Un morphisme d'algèbres unitaires $a : H \to A$ définit un élément inversible dans le monoïde* $\hom_{\mathcal{C}}(H, A)$. *Son inverse (à droite et à gauche) est donné par $a \circ \iota$.*

Démonstration. La preuve est standard. Elle est omise. □

Corollaire 1.10. (a) *Soit (H, m, cm) une bialgèbre biunitaire de $\mathcal{C}$. Il existe au plus une flèche ι faisant commuter le diagramme* (2). *En d'autres termes, une algèbre de Hopf admet une unique antipode.*

(b) *Soit $h : H \to H'$ un morphisme de bialgèbres biunitaires de $\mathcal{C}$. Supposons que H et H' sont des algèbres de Hopf d'antipodes respectives ι et ι'. Alors, $h \circ \iota = \iota' \circ h$.*

Démonstration. Si ι est une antipode de H, alors $\iota \in \hom_{\mathcal{C}}(H, H)$ est l'inverse de $\mathrm{id} \in \hom_{\mathcal{C}}(H, H)$. L'unicité de ι découle alors de l'unicité de l'inverse dans un monoïde unitaire.

Pour la seconde assertion, h est inversible dans le monoïde $\hom_{\mathcal{C}}(H, H')$ et son inverse est $h \circ \iota$. Par ailleurs, $h \in \hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(H', H)$ est également inversible d'inverse $\iota' \circ h$. Or, on a l'égalité des monoïdes : $\hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(H', H) = \hom_{\mathcal{C}}(H, H')$. On déduit que $h \circ \iota = \iota' \circ h$ par l'unicité de l'inverse dans un monoïde unitaire. □

Corollaire 1.11. *Soit (H, m, cm) une algèbre de Hopf d'antipode ι dans $\mathcal{C}$. Alors, $\iota : H \to H^{\mathrm{op}}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf.*

Démonstration. On montrera seulement que ι est un morphisme de coalgèbres de H dans H^{op}. Le fait que ι est un morphisme d'algèbres s'en déduit alors par dualité. Le morphisme $\tau \circ cm : H \to H \otimes H$ est un morphisme d'algèbres unitaires. Il admet donc un inverse dans $\hom_{\mathcal{C}}(H, H \otimes H)$ donné par $\tau \circ cm \circ \iota$. Pour montrer que $(\iota \otimes \iota) \circ cm = \tau \circ cm \circ \iota$, on vérifiera que $(\iota \otimes \iota) \circ cm$ est un inverse à $\tau \circ cm$ et on invoque l'unicité de l'inverse dans le monoïde $\hom_{\mathcal{C}}(H, H \otimes H)$. Les détails de cette vérification sont laissés au lecteur. □

Dans la suite, nous nous intéresserons aux algèbres de Hopf commutatives (mais non nécessairement cocommutatives). Dans ce cas, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.12. *Soit (H, m, cm) une algèbre de Hopf d'antipode ι dans $\mathcal{C}$. Si H est commutative (resp. cocommutative), on a $\iota^2 = \mathrm{id}$.*

Démonstration. Puisque H est commutative, $\iota : H \to H$ est un morphisme d'algèbres unitaires. Il vient que ι est inversible dans le monoïde $\hom_{\mathcal{C}}(H, H)$ et son inverse est $\iota \circ \iota$. Étant donné que $\mathrm{id}_H \bullet \iota = e$, on déduit, de l'unicité de l'inverse dans un monoïde unitaire, que $\mathrm{id}_H = \iota \circ \iota$. Le cas cocommutatif s'obtient par dualité. □

1.2. Construction d'une bialgèbre H à partir d'un foncteur monoïdal. On fixe deux catégories monoïdales $(\mathcal{E}, \otimes, \mathbb{1})$ et $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{1})$ ainsi qu'un foncteur monoïdal $f : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$. On suppose que f admet un adjoint à droite $g : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ et on pose $\mathrm{H} = f \circ g(\mathbb{1})$. Dans cette section, nous décrirons une situation simple qui nous permettera de munir H d'une structure naturelle de bialgèbre dans $\mathcal{E}$. Dans la section 1.4, nous montrerons comment renforcer nos hypothèses pour garantir que H est une algèbre de Hopf.

1.2.1. La multiplication et quelques préliminaires. Dans la suite, on désignera respectivement par η et δ les morphismes d'unité et de counité des adjonctions. Rappelons le résultat ci-dessous (voir [4, proposition 2.1.90]).

Lemme 1.13. *Le foncteur $g : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ est naturellement pseudo-monoïdal. Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, le morphisme $g(A) \otimes g(B) \to g(A \otimes B)$ est donné par la composition de*

$$g(A) \otimes g(B) \xrightarrow{\eta} gf(g(A) \otimes g(B)) \simeq g(fg(A) \otimes fg(B)) \xrightarrow{\delta\otimes\delta} g(A \otimes B).$$

Le morphisme de pseudo-unité $\mathbb{1} \to g(\mathbb{1})$ est la composition de $\mathbb{1} \xrightarrow{\eta} gf(\mathbb{1}) \simeq g(\mathbb{1})$.

Corollaire 1.14. *L'objet $g(\mathbb{1})$ est naturellement une algèbre commutative et unitaire de $\mathcal{M}$. La multiplication de $g(\mathbb{1})$ est donnée par la composition de*

$$g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1}) \xrightarrow{\eta} gf(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \simeq g(fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1})) \xrightarrow{\delta\otimes\delta} g(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \simeq g(\mathbb{1}).$$

L'unité de $g(\mathbb{1})$ est la composition de $\mathbb{1} \to gf(\mathbb{1}) \simeq g(\mathbb{1})$.

Démonstration. Ceci découle du lemme 1.13 ainsi que le lemme 1.3 appliqué au foncteur g. □

Corollaire 1.15. *L'objet* $\mathrm{H} = f \circ g(\mathbb{1})$ *est naturellement une algèbre commutative et unitaire de* $\mathcal{E}$. *On notera* $\mathrm{m} : \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *la multiplication de* H *et* $\mathrm{u} : \mathbb{1} \to \mathrm{H}$ *son unité.*

Démonstration. On utilise le corollaire 1.14 ainsi que le lemme 1.3 appliqué au foncteur f. □

Le foncteur $g : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ possède une structure plus fine que celle d'un foncteur pseudo-monoïdal. En fait, c'est un f-bicoprojecteur au sens de [4, définitions 2.1.100, 2.1.101]. On utilisera uniquement la structure de f-coprojecteur à droite sur g. On rappelle ce que cela signifie dans le lemme ci-dessous. Le lecteur est renvoyé à [4, proposition 2.1.97] pour une preuve.

Lemme 1.16. *On dispose d'un morphisme* $c_d : g(A) \otimes B \to g(A \otimes f(B))$, *dit de coprojection, naturel en* $A \in \mathcal{E}$ *et* $B \in \mathcal{M}$, *et tel que le diagramme suivant commute (pour* $C \in \mathcal{M}$*)*

$$\begin{array}{ccccc} (g(A) \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{c_d} & g(A \otimes f(B)) \otimes C & \xrightarrow{c_d} & g((A \otimes f(B)) \otimes f(C)) \\ \downarrow\wr & & & & \downarrow\wr \\ g(A) \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{c_d} & g(A \otimes f(B \otimes C)) & \xrightarrow{\sim} & g(A \otimes (f(B) \otimes f(C))). \end{array}$$

Ce morphisme est donné par la composition de

$$c_d : g(A) \otimes B \xrightarrow{\eta} gf(g(A) \otimes B) \simeq g(fg(A) \otimes f(B)) \xrightarrow{\delta} g(A \otimes f(B)).$$

Remarque 1.17. On dispose aussi d'un morphisme de coprojection à gauche $c_g : B \otimes g(A) \to g(f(B) \otimes A)$. Toutefois, c_d et c_g sont conjugués sous l'isomorphisme de permutation des facteurs.

Les deux lemmes ci-dessous nous seront utiles dans la suite. Leur vérification est laissée au lecteur.

Lemme 1.18. *Pour* $A \in \mathcal{E}$ *et* $B \in \mathcal{M}$, *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} fg(A) \otimes f(B) & \xrightarrow{\sim} & f(g(A) \otimes B) & \xrightarrow{c_d} & fg(A \otimes f(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta\otimes\mathrm{id}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ A \otimes f(B) & = & = & = & A \otimes f(B). \end{array}$$

Lemme 1.19. *Pour* $A, B \in \mathcal{M}$, *le carré suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} f(A \otimes B) & \xrightarrow{\eta} & f(gf(A) \otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle c_d} \\ fgf(A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & fg(f(A) \otimes f(B)). \end{array}$$

1.2.2. Construction de la comultiplication. On introduit l'hypothèse qui nous permettra de munir H d'une comultiplication.

Hypothèse 1.20. (a) Le foncteur f possède une 2-section dans la 2-catégorie des catégories monoïdales, i.e., il existe un foncteur monoïdal $e : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ et un isomorphisme de foncteurs monoïdaux $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} \simeq f \circ e$.

(b) Le morphisme de coprojection $c_d : g(A) \otimes e(B) \to g(A \otimes fe(B))$ est inversible pour tous $A,\ B \in \mathcal{E}$.

Pour $A, B \in \mathcal{E}$ on définit $\theta_{A,B} : g(A \otimes B) \xrightarrow{\sim} g(A) \otimes e(B)$ comme étant l'inverse de la composition de

$$g(A) \otimes e(B) \xrightarrow[\sim]{c_d} g(A \otimes fe(B)) \simeq g(A \otimes B).$$

Lorsque les objets A et B sont compris, il nous arrivera parfois de noter simplement θ à la place de $\theta_{A,B}$. Voici le théorème principal de cette section.

Théorème 1.21. *On suppose que l'hypothèse* 1.20 *est satisfaite. L'objet* $\mathrm{H} = f \circ g(\mathbb{1})$ *est naturellement une bialgèbre biunitaire pour la multiplication* m *du corollaire* 1.15 *et de la comultiplication* cm *donnée par la composition de*

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{cm} : fg(\mathbb{1}) &\xrightarrow{\eta} fgfg(\mathbb{1}) \simeq fg(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \\ &\xrightarrow[\sim]{\theta_{\mathbb{1}, fg(\mathbb{1})}} f(g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1}) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1}). \end{aligned}$$

De plus, la counité de H *est* $\delta : fg(\mathbb{1}) \to \mathbb{1}$.

La preuve du théorème 1.21 (notamment de la coassociativité de cm) reposera sur la proposition suivante.

Proposition 1.22. (a) *On dispose de bijections naturelles en* A *et* B *dans* $\mathcal{E}$

$$\text{(5)} \qquad \hom_{\mathcal{M}}(g(A), g(B)) \overset{(1)}{\simeq} \hom_{\mathcal{E}}(fg(A), B) \overset{(2)}{\simeq} \hom_{\mathcal{E}}(\mathrm{H} \otimes A, B).$$

L'isomorphisme (1) *ci-dessus est obtenu via l'adjonction* (f, g). *L'isomorphisme* (2) *ci-dessus est déduit de l'isomorphisme* $\mathrm{H} \otimes A \simeq fg(A)$ *égal à la composition de*

$$fg(\mathbb{1}) \otimes A \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A) \simeq f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \xrightarrow[\sim]{c_d} fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \simeq fg(A).$$

(b) *Soient* $A, B, C \in \mathcal{E}$, $a \in \hom_{\mathcal{M}}(g(A), g(B))$ *et* $b \in \hom_{\mathcal{M}}(g(B), g(C))$. *Modulo l'identification* (5)*, la flèche* $b \circ a$ *correspond à la composition de*

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{cm}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes A \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{a''} \mathrm{H} \otimes B \xrightarrow{b''} C,$$

avec a'' *et* b'' *les images respectives de* a *et* b *par* (5).

(c) *Pour un objet* A *de* $\mathcal{E}$*, l'identité de* $g(A)$ *correspond à* $\mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{cu}} \mathbb{1} \otimes A \simeq A$ *via l'identification* (5).

Démonstration. L'identification (5) fait correspondre à une flèche

$$a \in \hom_{\mathcal{M}}(g(A), g(B))$$

la composition de

$$\begin{aligned} fg(\mathbb{1}) \otimes A \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A) \simeq f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \\ \xrightarrow{c_d} fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \simeq fg(A) \xrightarrow{f(a)} fg(B) \xrightarrow{\delta} B. \end{aligned}$$

La partie (c) de l'énoncé découle alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} fg(\mathbb{1}) \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\delta\otimes\mathrm{id}"'] & fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\delta\otimes\mathrm{id}"] & f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] & fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\delta"] & fg(A) \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbb{1} \otimes A \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{1} \otimes fe(A) \arrow[rr, equal] & & \mathbb{1} \otimes fe(A) \arrow[r, "\sim"] & A. \end{tikzcd}$$

Ci-dessus, on a utilisé le lemme 1.18 pour la commutativité du sous-diagramme du milieu.

On passe maintenant à la partie (b) de l'énoncé qui est de loin la plus pénible à vérifier. Notons a' et b' les images de a et b par la première bijection dans (5). L'image de $b \circ a$ dans $\hom_{\mathcal{M}}(fg(A), C)$ par cette même bijection est donnée par la composition de

$$fg(A) \xrightarrow{\eta} fgfg(A) \xrightarrow{a'} fg(B) \xrightarrow{b'} C.$$

Il s'ensuit que l'image de $b \circ a$ par l'identification (5) est la composition de

$$\begin{aligned} fg(\mathbb{1}) \otimes A \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A) \simeq f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \\ \underset{\sim}{\xrightarrow{c_d}} fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \simeq fg(A) \xrightarrow{\eta} fgfg(A) \xrightarrow{a'} fg(B) \xrightarrow{b'} C. \end{aligned}$$

On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] \arrow[d, "\eta"'] & fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\eta"] & fg(A) \arrow[d, "\eta"] \\ fgf(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & fgfg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \arrow[r, "\sim"] & fgfg(A) \arrow[d, "a'"] \\ fg(\mathrm{H} \otimes fe(A)) \arrow[r, "\sim"] & fg(\mathrm{H} \otimes A) \arrow[r, "a''"] & fg(B). \end{tikzcd}$$

(La commutativité du sous-diagramme du bas est une simple traduction de la construction de a'' à partir de a'.) On déduit que l'image de $b \circ a$ par l'identification (5) est égale à la composition de

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H} \otimes fe(A) \xrightarrow{\sim} f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \xrightarrow{\eta} fgf(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \\ \xrightarrow{\sim} fg(\mathrm{H} \otimes fe(A)) \xrightarrow{\sim} fg(\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{a''} fg(B) \xrightarrow{b'} C. \end{aligned} \tag{7}$$

En utilisant le lemme 1.19, on déduit facilement que la composition de (7) est égale à celle de

$$\begin{aligned} fg(\mathbb{1}) \otimes A \xrightarrow{\eta} fgfg(\mathbb{1}) \otimes A \xrightarrow{\sim} fgfg(\mathbb{1}) \otimes fe(A) \xrightarrow{\sim} f(gfg(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \\ \underset{\sim}{\xrightarrow{c_d}} fg(fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A)) \xrightarrow{\sim} fg(\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{a''} fg(B) \xrightarrow{b'} C. \end{aligned} \tag{8}$$

Tous les sous-diagrammes qui constituent

(9)

$$\begin{tikzcd}
fgfg(\mathbb{1}) \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & fgfg(\mathbb{1}) \otimes fe(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & f(gfg(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[d, "\times\ \sim"] \\
fg(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\theta"', "\sim"] & fg(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes fe(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"', "\theta"] & f(g(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes e(A)) \arrow[d, "\sim"', "\times\ \theta"] \\
f(g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & f(g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \otimes fe(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & f((g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \otimes e(A)) \arrow[d, "\times\ \sim"] \\
(fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1})) \otimes A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & (fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1})) \otimes fe(A) \arrow[d, "\sim"] & f(g(\mathbb{1}) \otimes (efg(\mathbb{1}) \otimes e(A))) \arrow[d, "\times\ \sim"] \\
fg(\mathbb{1}) \otimes (fefg(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & fg(\mathbb{1}) \otimes (fefg(\mathbb{1}) \otimes fe(A)) \arrow[r, "\sim"] & fg(\mathbb{1}) \otimes f(efg(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[d, "\times\ \sim"] \\
fg(\mathbb{1}) \otimes (fg(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[rr, "\overset{\sim}{\times}"] & & fg(\mathbb{1}) \otimes fe(fg(\mathbb{1}) \otimes A),
\end{tikzcd}$$

commutent pour des raisons triviales. On retrouvent les flèches ci-dessus marquées par une croix sur le bord du diagramme suivant :

(10)

$$\begin{tikzcd}
fg(fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A)) \arrow[r, "\sim"] & fg(fg(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[r, "a''"] \arrow[dd, "\sim"] & fg(B) \arrow[dd, "\sim"] \\
f(gfg(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[u, "c_d", "\sim"'] \arrow[d, "\sim\ \times"'] & & \\
f(g(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes e(A)) \arrow[r, phantom, "(*)"] \arrow[d, "\theta\ \times\ \sim"] & fg(\mathbb{1} \otimes (fg(\mathbb{1}) \otimes A)) \arrow[r, "a''"] \arrow[dd, "\sim"', "\theta"] & fg(\mathbb{1} \otimes B) \arrow[dd, "\sim"', "\theta"] \\
f((g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \otimes e(A)) \arrow[d, "\sim\ \times"'] & & \\
f(g(\mathbb{1}) \otimes (efg(\mathbb{1}) \otimes e(A))) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim\ \times"'] & f(g(\mathbb{1}) \otimes e(fg(\mathbb{1}) \otimes A)) \arrow[r, "a''"] \arrow[d, "\sim"] & f(g(\mathbb{1}) \otimes e(B)) \arrow[d, "\sim"] \\
fg(\mathbb{1}) \otimes f(efg(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[r, "\overset{\sim}{\times}"] & fg(\mathbb{1}) \otimes fe(fg(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[r, "a''"] \arrow[d, "\sim\ \times"'] & fg(\mathbb{1}) \otimes fe(B) \arrow[d, "\sim"] \\
& fg(\mathbb{1}) \otimes (fg(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[r, "a''"] & fg(\mathbb{1}) \otimes B.
\end{tikzcd}$$

Les carrés du diagramme précédent sont clairement commutatifs. Le sous-diagramme désigné par $(*)$ commute également. Il s'agit, à peu de chose près, d'une application du lemme 1.16. (Rappelons que les flèches θ sont les inverses de la composition d'un morphisme de coprojection c_d et d'un isomorphisme induit par $\mathrm{id}_{\mathcal{E}} \simeq f \circ e$.) En recollant les diagrammes commutatifs (9) et (10) suivants les flèches marquées par des croix, on voit que la composition de (8) est égale à la composition de

(11)

$$\begin{aligned} fg(\mathbb{1}) \otimes A &\xrightarrow{\eta} fgfg(\mathbb{1}) \otimes A \xrightarrow{\sim} fg(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes A \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \otimes A \\ &\xrightarrow{\sim} (fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1})) \otimes A \xrightarrow{\sim} (fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes A \\ &\xrightarrow{\sim} fg(\mathbb{1}) \otimes (fg(\mathbb{1}) \otimes A) \xrightarrow{a''} fg(\mathbb{1}) \otimes B \xrightarrow{\sim} fg(\mathbb{1}) \otimes fe(B) \\ &\xrightarrow{\sim} f(g(\mathbb{1}) \otimes e(B)) \xrightarrow{c_d} fg(\mathbb{1} \otimes fe(B)) \simeq fg(B) \xrightarrow{b'} C. \end{aligned}$$

Par la construction de b'' à partir de b' et la définition de la comultiplication cm, on voit immédiatement que la composition de (11) est égale à celle de (6). La proposition est démontrée. □

On peut maintenant donner la preuve du théorème principal de cette section.

Démonstration du théorème 1.21. On divise la preuve en deux parties.

Partie A. On montre d'abord que la comultiplication cm est coassociative. Pour tous objets A, B, C et D de $\mathcal{E}$ et toutes flèches $a'' : \mathrm{H} \otimes A \to B$, $b'' : \mathrm{H} \otimes B \to C$ et $c'' : \mathrm{H} \otimes C \to D$ de $\mathcal{E}$, les compositions de

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{cm}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes A \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{\mathrm{cm}} \mathrm{H} \otimes ((\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes A) \\ \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A)) \xrightarrow{a''} \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes B) \xrightarrow{b''} \mathrm{H} \otimes C \xrightarrow{c''} D \end{aligned} \tag{12}$$

et de

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{cm}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes A \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{\mathrm{cm}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes (\mathrm{H} \otimes A) \\ \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A)) \xrightarrow{a''} \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes B) \xrightarrow{b''} \mathrm{H} \otimes C \xrightarrow{c''} D \end{aligned} \tag{13}$$

coïncident. En effet, notons $a : g(A) \to g(B)$, $b : g(B) \to g(C)$ et $c : g(C) \to g(D)$ les images respectives de a'', b'' et c'' par l'identification inverse de (5). La partie (b) de la proposition 1.22 affirme alors que les compositions (12) et (13) correspondent à $c \circ (b \circ a)$ et $(c \circ b) \circ a$ respectivement par l'identification inverse de (5). L'assertion recherchée découle ainsi de l'associativité de la composition des flèches dans $\mathcal{M}$.

On obtient à présent l'associativité de cm en prenant $A = \mathbb{1}$, $B = \mathrm{H} \otimes \mathbb{1}$, $C = \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes \mathbb{1})$ et $D = \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes \mathbb{1}))$ ainsi que les identités pour les flèches a'', b'' et c''.

Pour montrer que $(\mathrm{H}, \mathrm{cm})$ est une coalgèbre counitaire, on applique un raisonnement similaire. Soient A et B deux objets de $\mathcal{E}$ et $a'' : \mathrm{H} \otimes A \to B$ une flèche. Par la partie (c) de la proposition 1.22, les deux compositions de

$$\mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{cm}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes A \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{a''} \mathrm{H} \otimes B \xrightarrow{\delta} \mathbb{1} \otimes B \simeq B$$

et de

$$\mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{cm}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes A \simeq \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H} \otimes (\mathbb{1} \otimes A) \simeq \mathrm{H} \otimes A \xrightarrow{a''} B$$

coïncident et sont égales à a''. Pour conclure, on prend $A = \mathbb{1}$, $B = \mathrm{H} \otimes \mathbb{1}$ et a'' l'identité.

Partie B. Il reste à voir que les morphismes $\mathrm{cm} : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$ et $\mathrm{cu} : \mathrm{H} \to \mathbb{1}$ sont des morphismes d'algèbres unitaires. Nous utiliserons librement le lemme 1.3. Remarquons d'abord que l'algèbre unitaire (H, m) est celle obtenue de l'algèbre évidente $\mathbb{1}$ par application du foncteur pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire $f \circ g$. Par ailleurs, les morphismes d'unité $\eta : \mathrm{id} \to g \circ f$ et de counité $\delta : f \circ g \to \mathrm{id}$ sont des morphismes de foncteurs pseudo-monoïdaux et pseudo-unitaires (voir [4, corrolaire 2.1.91]). Ceci montre déjà que $\mathrm{cu} : \mathrm{H} = fg(\mathbb{1}) \to \mathbb{1}$ est un morphisme d'algèbres unitaires.

Pour montrer que cm est un morphisme d'algèbres unitaires, on montrera que toutes les flèches de (4) sont des morphismes d'algèbres unitaires. La flèche $\eta : fg(\mathbb{1}) \to fgfg(\mathbb{1})$ (avec $fgfg(\mathbb{1})$ muni de sa structure d'algèbre unitaire déduite de celle de $\mathbb{1}$ par application du foncteur pseudo-monoïdal $fgfg$) est bien un morphisme d'algèbres unitaires. Il en est de même des isomorphismes

$$fgfg(\mathbb{1}) \simeq fg(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})), \quad f(g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1})$$

et

$$fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1}) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1}).$$

Il nous reste donc à vérifier que $\theta_{\mathbb{1}, fg(\mathbb{1})}$ est un isomorphisme d'algèbres unitaires. Il suffit clairement de montrer que le morphisme de coprojection $c_d : g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1}) \to g(\mathbb{1} \otimes fefg(\mathbb{1}))$ est un morphisme d'algèbres unitaires. Rappelons que ce morphisme est défini par la composition de

$$g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1}) \to gf(g(\mathbb{1}) \otimes efg(\mathbb{1})) \to g(fg(\mathbb{1}) \otimes fefg(\mathbb{1})) \to g(\mathbb{1} \otimes fefg(\mathbb{1})).$$

Il est clair que chacune des flèches ci-dessus est un morphisme d'algèbres unitaires. □

1.3. Comodules sur H et opérations. On continue ici l'étude menée dans la section 1.2. Notre but est de montrer que le foncteur f s'enrichit naturellement en un foncteur dans la catégorie des H-comodules. On commence d'abord par des rappels autour de la notion de comodule.

1.3.1. Comodules en général. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale et (B, cm) une coalgèbre de $\mathcal{C}$. Rappelons qu'un B-*comodule à gauche* est un couple (X, ca) formé d'un objet X de $\mathcal{C}$ et d'une flèche (appelée *coaction*) $ca : X \to B \otimes X$ telle que

$$(\mathrm{id} \otimes ca) \circ ca = (cm \otimes \mathrm{id}) \circ ca.$$

On a également la notion de B-*comodule à droite*. Dans la suite, nous travaillerons surtout avec les comodules à gauche et nous ne préciserons plus le coté que lorsqu'il s'agit d'un comodule à droite. La notion de morphisme de B-comodules est celle qu'on pense. On notera $\mathrm{coMod}'(B)$ la catégorie des B-comodules. Si la coalgèbre B est counitaire, on dit que le B-comodule X est *counitaire* si $(cu \otimes \mathrm{id}) \circ ca$ est l'isomorphisme évident $X \simeq \mathbb{1} \otimes X$. On notera $\mathrm{coMod}(B) \subset \mathrm{coMod}'(B)$ la sous-catégorie pleine des B-comodules counitaires.

Exemple 1.23. (a) Soit X un B-comodule. Pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, on définit un B-comodule $X \otimes Y$ en prenant la coaction donnée par la composition de

$$X \otimes Y \xrightarrow{ca \otimes \mathrm{id}} (H \otimes X) \otimes Y \simeq H \otimes (X \otimes Y).$$

(b) Soit (H, m, cm) une bialgèbre biunitaire de $\mathcal{C}$. L'objet unité $\mathbb{1}$ est naturellement un H-comodule pour la coaction égale à la composition de $\mathbb{1} \xrightarrow{u} H \simeq H \otimes \mathbb{1}$. En utilisant (a) et l'isomorphisme $\mathbb{1} \otimes A \simeq A$ on en déduit une structure de H-comodule sur tout objet A de $\mathcal{C}$. Elle est donnée par la composition de $A \simeq \mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}} H \otimes A$. Le H-comodule A ainsi obtenu est qualifié de *trivial*.

Lemme 1.24. *Soient (B_1, cm_1) et (B_2, cm_2) deux coalgèbres (counitaires) dans $\mathcal{C}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on suppose donné un B_i-comodule (counitaire) (X_i, ca_i). L'objet $X_1 \otimes X_2$ est naturellement un $(B_1 \otimes B_2)$-comodule (counitaire) pour la coaction donnée par la composition de*

$$X_1 \otimes X_2 \xrightarrow{ca_1 \otimes ca_2} (H_1 \otimes X_1) \otimes (H_2 \otimes X_2) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (H_1 \otimes H_2) \otimes (X_1 \otimes X_2).$$

Démonstration. La preuve est de même nature que celle du lemme 1.2 et sera aussi omise. □

Soient $h : B \to B'$ un morphisme de coalgèbres (counitaires) et (X, ca) un B-comodule (counitaire). Alors, X est naturellement un B'-module (counitaire) pour la coaction égale à $(h \circ \mathrm{id}) \circ ca$. Étant donné que la multiplication d'une bialgèbre (biunitaire) est un morphisme de coalgèbres (counitaires), on obtient le fait suivant.

Corollaire 1.25. *Soit (H, m, cm) une bialgèbre commutative et biunitaire de $\mathcal{C}$. Étant donnés deux H-comodules counitaires (X_1, ca_1) et (X_2, ca_2), on a H-comodule counitaire $X_1 \otimes X_2$ dont la coaction est la composition de*

$$X_1 \otimes X_2 \xrightarrow{ca_1 \otimes ca_2} (H \otimes X_1) \otimes (H \otimes X_2) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (H \otimes H) \otimes (X_1 \otimes X_2) \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} H \otimes (X_1 \otimes X_2).$$

La catégorie $\mathrm{coMod}(H)$ *est alors une catégorie monoïdale. Un objet unité est donné par le B-comodule trivial $\mathbb{1}$.*

Remarque 1.26. Lorsque la bialgèbre H n'est pas commutative, la catégorie $(\mathrm{coMod}(H), \otimes)$ est monoïdale mais non symétrique. En effet, si X_1 et X_2 sont des H-comodules, la permutation des facteurs $\tau : X_1 \otimes X_2 \simeq X_2 \otimes X_1$ n'est pas en général un morphisme de H-comodules.

Remarque 1.27. Soient (H, m, cm) une bialgèbre commutative et biunitaire de $\mathcal{C}$ et Y un objet de $\mathcal{C}$ que l'on munit de la structure de H-comodule trivial. Étant donné un H-comodule X, le H-comodule $X \otimes Y$ (décrit dans le corollaire 1.25) coïncide avec le H-comodule de la première partie de l'exemple 1.23.

1.3.2. Enrichissement de f en un foncteur dans la catégorie des H-comodules. Reprenons à présent les notations de la section 1.2. On a le résultat suivant qui complète le théorème 1.21.

Proposition 1.28. *On suppose que l'hypothèse* 1.20 *est satisfaite.*

(a) *Soit A un objet de $\mathcal{M}$. Alors $f(A)$ est naturellement un* H*-comodule counitaire. La coaction de* H *sur $f(A)$ est donnée par la composition de*

$$\begin{aligned}\mathrm{ca}_A : f(A) \xrightarrow{\eta} fgf(A) &\simeq fg(\mathbb{1} \otimes f(A)) \\ &\xrightarrow[\sim]{\theta_{\mathbb{1}, f(A)}} f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fef(A) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes f(A).\end{aligned}$$

De plus, pour toute flèche $a : A \to B$ dans $\mathcal{M}$, $f(a) : f(A) \to f(B)$ est un morphisme de H*-comodules.*

(b) *Soient A et B deux objets de $\mathcal{M}$. L'isomorphisme évident $f(A \otimes B) \simeq f(A) \otimes f(B)$ est un isomorphisme de* H*-comodules (où l'objet $f(A) \otimes f(B)$ est muni de la coaction du corollaire* 1.25 *déduite des structures de* H*-comodules sur $f(A)$ et $f(B)$).*

(c) *Soit A un objet de $\mathcal{E}$. L'isomorphisme $fe(A) \simeq A$ est un isomorphisme de* H*-comodules si l'objet A est vu comme un* H*-comodule trivial.*

Démonstration. On divisera la preuve en trois parties. L'assertion que $(f(A), \mathrm{ca}_A)$ est un H-comodule ne sera établie que dans la dernière étape. Il sera donc pratique d'introduire la notion de *pré-comodule* pour désigner un couple (X, ca) formé d'un objet X de $\mathcal{E}$ muni d'un morphisme $ca : X \to \mathrm{H} \otimes X$ ne satisfaisant a priori à aucune compatibilité avec la comultiplication de H. La notion de morphismes de pré-comodules est celle que l'on pense. Il est clair que toute flèche $a : A \to B$ de $\mathcal{M}$ induit un morphisme de pré-comodules

$$f(a) : (f(A), \mathrm{ca}_A) \to (f(B), \mathrm{ca}_B).$$

Étape A. Dans cette étape, on montre que $f(A \otimes B) \simeq f(A) \otimes f(B)$ est un isomorphisme de pré-comodules. On munit bien-entendu $f(A) \otimes f(B)$ de la « coaction » du corollaire 1.25.

En utilisant le lemme 1.30 ci-dessous (et la définition des isomorphismes θ), on voit aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
g(\mathbb{1} \otimes f(A)) \otimes g(\mathbb{1} \otimes f(B)) \arrow[r, "\theta\otimes\theta", "\sim"'] \arrow[d, "m"'] & (g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \otimes (g(\mathbb{1}) \otimes ef(B)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}", "\sim"'] \\
g((\mathbb{1} \otimes f(A)) \otimes (\mathbb{1} \otimes f(B))) \arrow[d, "\sim"'] & (g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \otimes (ef(A) \otimes ef(B)) \arrow[d, "m"] \\
g(\mathbb{1} \otimes f(A \otimes B)) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] & g(\mathbb{1}) \otimes ef(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

commute. En utilisant le fait que $\eta : \mathrm{id} \to g \circ f$ est un morphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux, on voit également que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f(A) \otimes f(B) \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] \arrow[d, "\sim"'] & fgf(A) \otimes fgf(B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "m"] & fg(\mathbb{1} \otimes f(A)) \otimes fg(\mathbb{1} \otimes f(B)) \arrow[d, "m"] \\
f(A \otimes B) \arrow[r, "\eta"] & fgf(A \otimes B) \arrow[r, "\sim"] & fg(\mathbb{1} \otimes (f(A) \otimes f(B)))
\end{tikzcd}$$

commute. Le résultat recherché est maintenant clair.

Étape B. Dans cette étape on démontre la partie (c) de l'énoncé. Il s'agit de vérifier que la « coaction » de H sur $fe(A)$ est la coaction triviale. Notons $u : \mathbb{1} \to g(\mathbb{1})$ l'unité de l'algèbre $g(\mathbb{1})$. Du lemme 1.19, on déduit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} fe(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\eta"'] & f(\mathbb{1} \otimes e(A)) \arrow[r, "u"] & f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \arrow[d, "\sim"', "c_d"] \\ fgfe(A) \arrow[rr, "\sim"] & & fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \end{tikzcd}$$

commute. Il s'ensuit que la coaction de H sur $fe(A)$ est donnée par la composition de

$$fe(A) \simeq f(\mathbb{1} \otimes e(A)) \xrightarrow{u} f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \underset{\sim}{\xrightarrow{c_d}} fg(\mathbb{1} \otimes fe(A))$$
$$\underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1}) \otimes efe(A)) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A).$$

Par la construction de l'isomorphisme θ, la composition de

$$f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \underset{\sim}{\xrightarrow{c_d}} fg(\mathbb{1} \otimes fe(A)) \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1}) \otimes efe(A)) \simeq f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A))$$

est l'identité. Il s'ensuit que la coaction de H sur $fe(A)$ est donnée par la composition de

$$fe(A) \simeq f(\mathbb{1} \otimes e(A)) \xrightarrow{u} f(g(\mathbb{1}) \otimes e(A)) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A)$$

qui est clairement égale à celle de $fe(A) \simeq \mathbb{1} \otimes fe(A) \xrightarrow{\mathrm{u}} fg(\mathbb{1}) \otimes fe(A)$.

Étape C. Dans cette dernière étape, on montre que $f(A)$ est un H-comodule counitaire. Ceci achèvera la preuve de la proposition. Soit A un objet de $\mathcal{M}$. Il faut vérifier que les diagrammes

$$(14) \quad \begin{tikzcd} f(A) \arrow[r, "\mathrm{ca}_A"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ca}_A"] & \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes f(A)) \arrow[d, "\sim"] \\ f(A) \arrow[r, "\mathrm{ca}_A"] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[r, "\mathrm{cm} \otimes \mathrm{id}"] & (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes f(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f(A) \arrow[r, "\mathrm{ca}_A"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[d, "\mathrm{cu} \otimes \mathrm{id}"] \\ & \mathbb{1} \otimes f(A) \end{tikzcd}$$

commutent. Nous utiliserons la remarque simple suivante. Soit $a : A \to B$ une flèche de $\mathcal{M}$ telle que $f(a) : f(A) \to f(B)$ admette une section (non nécessairement compatible aux coactions de H). Pour montrer que les diagrammes dans (14) commutent, il suffit de montrer que les diagrammes correspondants pour B commutent. On applique cette remarque au morphisme $\eta : A \to gf(A)$. En effet, $\eta : f(A) \to fgf(A)$ admet une section donnée par $\delta : fgf(A) \to f(A)$. Il suffit donc de prouver que $(f(gf(A)), \mathrm{ca}_{gf(A)})$ est H-comodule. Or, on dispose d'une chaîne d'isomorphismes $gf(A) \simeq g(\mathbb{1} \otimes f(A)) \simeq g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)$. On est donc ramené à montrer que $(f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)), \mathrm{ca}_{g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)})$ est un H-comodule unitaire. Par la première étape de la preuve, il suffit de vérifier que $(fg(\mathbb{1}), \mathrm{ca}_{g(\mathbb{1})})$ et $(fef(A), \mathrm{ca}_{ef(A)})$ sont des H-comodules unitaires. Par la deuxième étape de la preuve, $(fef(A), \mathrm{ca}_{ef(A)})$ est un H-comodule unitaire puisque $\mathrm{ca}_{ef(A)}$ est la coaction triviale. Il reste à voir que $(fg(\mathbb{1}), \mathrm{ca}_{g(\mathbb{1})})$ est un H-comodule unitaire. Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{ca}_{g(\mathbb{1})} = \mathrm{cm}$. □

Remarque 1.29. Gardons les hypothèses et notations de la proposition 1.28. L'association $A \in \mathcal{M} \rightsquigarrow (f(A), \mathrm{ca}_A)$ définit un foncteur monoïdal $\tilde{f} : \mathcal{M} \to \mathrm{coMod(H)}$ qui factorise le foncteur f. Plus précisément, on a $f = o \circ \tilde{f}$ avec $o : \mathrm{coMod(H)} \to \mathcal{E}$ le foncteur d'oubli. On verra dans la section 1.5.2 que cette factorisation est universelle.

Le lemme ci-dessous a servi dans la preuve de la proposition 1.28.

Lemme 1.30. *Soient A' et C' des objets de $\mathcal{E}$, et B et D des objets de $\mathcal{M}$. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(g(A') \otimes B) \otimes (g(C') \otimes D) \arrow[r, "c_d \otimes c_d"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}"', "\sim"] & g(A' \otimes f(B)) \otimes g(C' \otimes f(D)) \arrow[d, "m"] \\
(g(A') \otimes g(C')) \otimes (B \otimes D) \arrow[dd, "m\otimes\mathrm{id}"'] & g((A' \otimes f(B)) \otimes (C' \otimes f(D))) \arrow[d, "\sim"', "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}"] \\
& g((A' \otimes C') \otimes (f(B) \otimes f(D))) \arrow[d, "\sim"] \\
g(A' \otimes C') \otimes (B \otimes D) \arrow[r, "c_d"] & g((A' \otimes C') \otimes f(B \otimes D))
\end{tikzcd}$$

est commutatif (où on a noté m le morphisme structural du foncteur pseudo-monoïdal g).

Démonstration. La vérification de ce lemme est pénible et sans intérêt. Elle est omise. □

1.3.3. Opérations sur le foncteur f. On garde les hypothèses et les notations de la section 1.3.2.

Définition 1.31. Soit E un objet de $\mathcal{E}$. Une transformation naturelle

$$t : f(-) \to E \otimes f(-)$$

est appelée une *opération* si pour tout objet A de $\mathcal{M}$ et B' de $\mathcal{E}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f(A \otimes e(B')) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\sim"'] & E \otimes f(A \otimes e(B')) \arrow[r, "\sim"] & E \otimes (f(A) \otimes B') \arrow[d, "\sim"] \\
f(A) \otimes B' \arrow[rr, "t"] & & (E \otimes f(A)) \otimes B'
\end{tikzcd}$$

commute. On notera $\mathrm{Oper}_E(f)$ l'ensemble des opérations de $f(-)$ dans $E \otimes f(-)$.

Soit E un objet de $\mathcal{E}$. Étant donnée une flèche $a : \mathrm{H} \to E$, on définit une transformation naturelle $t_a : f(-) \to E \otimes f(-)$ donnée par la composition de

$$f(-) \xrightarrow{\mathrm{ca}} \mathrm{H} \otimes f(-) \xrightarrow{a\otimes\mathrm{id}} E \otimes f(-).$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.32. *Soit E un objet de $\mathcal{E}$. L'association $a \rightsquigarrow t_a$ définit une bijection :*

$$\hom_{\mathcal{E}}(\mathrm{H}, E) \simeq \mathrm{Oper}_E(f).$$

Démonstration. Montrons d'abord que la transformation naturelle t_a est une opération. Soient A un objet de $\mathcal{M}$ et B' un objet de $\mathcal{E}$. Le H-comodule $f(A \otimes e(B'))$ est isomorphe à $f(A) \otimes B'$ (où B' est vu comme un H-comodule trivial). En utilisant la remarque 1.27, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f(A \otimes e(B')) \arrow[r, "\mathrm{ca}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{H} \otimes f(A \otimes e(B')) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H} \otimes (f(A) \otimes B') \arrow[d, "\sim"] \\
f(A) \otimes B' \arrow[rr, "\mathrm{ca}"] & & (\mathrm{H} \otimes f(A)) \otimes B'.
\end{tikzcd}$$

Il est maintenant aisé de conclure que t_a est une opération. On a donc une application $\alpha : \hom_{\mathcal{E}}(\mathrm{H}, E) \to \mathrm{Oper}_E(f)$. D'autre part, on construit une application β dans l'autre sens en associant à une opération $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ la composition de

$$fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{t} E \otimes fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{cu}} E \otimes \mathbb{1} \simeq E.$$

Nous allons montrer que $\beta \circ \alpha$ et $\alpha \circ \beta$ sont des identités.

Soit $a : \mathrm{H} \to E$ une flèche de $\mathcal{E}$. La flèche $\beta \circ \alpha(a)$ est donnée par la composition de

$$fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{cm}} \mathrm{H} \otimes fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{a\otimes\mathrm{id}} E \otimes fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{cu}} E \otimes \mathbb{1} \simeq E.$$

L'égalité $a = \beta \circ \alpha(a)$ est alors claire. D'autre part, soit $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ une opération. L'opération $\alpha \circ \beta(t)$ est donnée, en $A \in \mathcal{M}$, par la composition de

$$f(A) \xrightarrow{\mathrm{ca}} fg(\mathbb{1}) \otimes f(A) \xrightarrow{t\otimes\mathrm{id}} (E \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{cu}\otimes\mathrm{id}} E \otimes f(A).$$

Considérons le morphisme $s : A \to g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)$ égal à la composition de

$$A \xrightarrow{\eta} gf(A) \simeq g(\mathbb{1} \otimes f(A)) \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} g(\mathbb{1}) \otimes ef(A).$$

En utilisant que t est une opération, on voit que tous les sous-diagrammes qui constituent

$$\begin{tikzcd}
f(A) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{ca}_A"] & f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "t"] & fg(\mathbb{1}) \otimes f(A) \arrow[r, "t\otimes\mathrm{id}"] & (E \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes f(A) \arrow[d, equal] \\
E \otimes f(A) \arrow[r, "s"] \arrow[rrd, equal] & E \otimes f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[r, "\sim"] & E \otimes (fg(\mathbb{1}) \otimes f(A)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{cu}\otimes\mathrm{id}"] & (E \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes f(A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{cu}\otimes\mathrm{id}"] \\
& & E \otimes f(A) \arrow[r, equal] & E \otimes f(A)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Ceci montre la relation $t = \alpha \circ \beta(t)$. □

Remarque 1.33. (a) Étant données deux opérations $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ et $t' : f(-) \to E' \otimes f(-)$ (avec E et E' deux objets de $\mathcal{E}$), on définit une transformation naturelle $t' \circledcirc t$ par la composition de

$$f(-) \xrightarrow{t} E \otimes f(-) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes t'} E \otimes (E' \otimes f(-)) \simeq (E \otimes E') \otimes f(-).$$

On vérifie facilement que $t' \circledcirc t$ est encore une opération, i.e., un élément de $\mathrm{Oper}_{E\otimes E'}(f)$. Ceci fournit un accouplement $- \circledcirc - : \mathrm{Oper}_{E'}(f) \times \mathrm{Oper}_E(f) \to \mathrm{Oper}_{E\otimes E'}(f)$ qui est associatif.

(b) Lorsque (E, m) est une algèbre de $\mathcal{E}$ et $t,\ t' \in \mathrm{Oper}_E(f)$, on notera $t' \circ t$ la composition de
$$f(-) \xrightarrow{t' \circledcirc t} (E \otimes E) \otimes f(-) \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} E \otimes f(-).$$
Ceci définit une loi de composition interne associative sur $\mathrm{Oper}_E(f)$. Si E est unitaire, cette loi possède un élément neutre donné par la composition de $f(-) \simeq \mathbb{1} \otimes f(-) \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}} E \otimes f(-)$.

Lemme 1.34. *Soient E et E' deux objets de $\mathcal{E}$. Soient $t \in \mathrm{Oper}_E(f)$ et $t' \in \mathrm{Oper}_{E'}(f)$ deux opérations. L'opération composée $t' \circledcirc t$ correspond via la bijection de la proposition* 1.32 *à la composition de*
$$\mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{cm}} \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \xrightarrow{\beta(t) \otimes \beta(t')} E \otimes E'.$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve de la proposition 1.32 et notamment les applications inverses l'une de l'autre : α et β. Étant données une opération $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ et une flèche $c : E \to F$, on déduit une nouvelle opération en prenant la transformation naturelle composée $(c \otimes \mathrm{id}) \circ t$. Si l'énoncé du lemme est vrai pour deux opérations t et t', il est alors vrai pour les deux opérations $(c \otimes \mathrm{id}) \circ t$ et $(c' \otimes \mathrm{id}) \circ t'$ (avec $c' : E' \to F'$ une flèche de $\mathcal{E}$). Étant donné que $t = \alpha \circ \beta(t) = (\beta(t) \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{ca}$ et $t' = \alpha \circ \beta(t') = (\beta(t') \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{ca}$, nous sommes ramenés à traiter le cas où $t = t' = \mathrm{ca}$. Il s'agit alors de vérifier que les deux compositions de
$$f(A) \xrightarrow{\mathrm{ca}} \mathrm{H} \otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ca}} \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes f(A)) \simeq (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes f(A)$$
et de
$$f(A) \xrightarrow{\mathrm{ca}} \mathrm{H} \otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{cm} \otimes \mathrm{id}} (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes f(A)$$
sont égales. Mais on a déjà établi que $(f(A), \mathrm{ca})$ était un H-comodule. Le lemme est démontré. □

Corollaire 1.35. *La bijection de la proposition* 1.32 *est un isomorphisme de monoïdes si l'on munit l'ensemble* $\hom_{\mathcal{E}}(\mathrm{H}, E)$ *de sa loi de composition interne décrite dans la proposition* 1.9 (a) *et l'ensemble* $\mathrm{Oper}_f(E)$ *de la composition définie dans la remarque* 1.33 (b).

Définition 1.36. Soit (E, m) une algèbre de $\mathcal{E}$. Une transformation naturelle $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ est dite *multiplicative* lorsque le diagramme
$$\begin{tikzcd}
f(A) \otimes f(B) \arrow[r, "t \otimes t"] \arrow[d, "\sim"'] & (E \otimes f(A)) \otimes (E \otimes f(B)) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & (E \otimes E) \otimes (f(A) \otimes f(B)) \arrow[d, "m"] \\
f(A \otimes B) \arrow[r, "t"] & E \otimes f(A \otimes B) \arrow[r, "\sim"] & E \otimes (f(A) \otimes f(B))
\end{tikzcd}$$
commute pour tout A et B dans $\mathcal{M}$. Si E est unitaire, on dit que t est *unitaire* si la composition de $\mathbb{1} \simeq f(\mathbb{1}) \xrightarrow{t} E \otimes f(\mathbb{1}) \simeq E$ est l'unité de E.

Lemme 1.37. *Soit* (E, m) *une algèbre unitaire de* $\mathcal{E}$. *Soit* $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ *une transformation naturelle multiplicative et unitaire. Alors,* t *est une opération si et seulement si pour tout objet* A' *de* $\mathcal{E}$, *le triangle*

$$\begin{tikzcd} fe(A') \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "t"'] & \mathbb{1} \otimes fe(A') \arrow[d, "u\otimes\mathrm{id}"] \\ & E \otimes fe(A') \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Il s'agit d'un exercice facile qu'on laissera au lecteur. □

Soit (E, m) une algèbre unitaire. On notera $\mathrm{Oper}_E^{\times}(f) \subset \mathrm{Oper}_E(f)$ le sous-ensemble des opérations multiplicatives et unitaires. On a le résultat suivant.

Proposition 1.38. *La bijection* $\hom_{\mathcal{E}}(\mathrm{H}, E) \simeq \mathrm{Oper}_E(f)$ *de la proposition* 1.32 *identifie* $\mathrm{Oper}_E^{\times}(f)$ *avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires de* H *vers* E.

Démonstration. Si $t : f(-) \to E \otimes f(-)$ est une opération multiplicative et unitaire, la composition de

$$fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{t} E \otimes fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{cu}} E \otimes \mathbb{1} \simeq E$$

est clairement un morphisme d'algèbres unitaires. D'autre part, la transformation naturelle $\mathrm{ca} : f(-) \to \mathrm{H} \otimes f(-)$ est multiplicative et unitaire. En effet, ceci est une traduction du contenu de la seconde partie de la proposition 1.28. Il s'ensuit que si $a : \mathrm{H} \to E$ est un morphisme d'algèbres unitaires, l'opération t_a est multiplicative et unitaire. □

Remarque 1.39. (a) Soient E et E' deux algèbres unitaires de $\mathcal{E}$. Étant données deux opérations multiplicatives et unitaires $t \in \mathrm{Oper}_E^{\times}(f)$ et $t' \in \mathrm{Oper}_{E'}^{\times}(f)$, l'opération $t' \circledcirc t$ est multiplicative et unitaire. Une façon économique de voir cela est d'utiliser la proposition précédente et le lemme 1.34.

(b) Soit E une algèbre commutative et unitaire. Étant données deux opérations multiplicatives et unitaires t, $t' \in \mathrm{Oper}_E^{\times}(f)$, l'opération $t' \circ t$ est encore multiplicative et unitaire (on utilise pour cela que $m : E \otimes E \to E$ est un morphisme d'algèbres unitaires). En d'autres termes, $\mathrm{Oper}_E^{\times}(f) \subset \mathrm{Oper}_E(f)$ est un sous-monoïde unitaire.

1.4. Existence d'une antipode sur H. Dans cette section, on montre que la bialgèbre $\mathrm{H} = fg(\mathbb{1})$ est une algèbre de Hopf si certaines hypothèses de la section 1.2 sont renforcées. On supposera dans cette section l'hypothèse suivante qui entraîne clairement l'hypothèse 1.20.

Hypothèse 1.40. (a) Le foncteur f possède une 2-section dans la 2-catégorie des catégories monoïdales. De plus, le foncteur e admet un adjoint à droite u.

(b) Pour tout $A' \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{M}$ le morphisme de coprojection $c_d : g(A') \otimes B \to g(A' \otimes f(B))$ est inversible.

Sous l'hypothèse 1.40, on note $p_d : g(A' \otimes f(B)) \xrightarrow{\sim} g(A') \otimes B$ l'inverse de c_d. On définit une flèche $\mathrm{cd} : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$ en prenant la composition de

$$\begin{aligned}\mathrm{cd} : fg(\mathbb{1}) \simeq feugfg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\delta} fgfg(\mathbb{1}) &\simeq fg(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \\ &\underset{\sim}{\xrightarrow{p_d}} f(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1}).\end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout objet A de $\mathcal{M}$, on définit une flèche $\mathrm{cd}_A : f(A) \to \mathrm{H} \otimes f(A)$ en prenant la composition de

$$\begin{aligned}\mathrm{cd}_A : f(A) \simeq feugf(A) \xrightarrow{\delta} fgf(A) &\simeq fg(\mathbb{1} \otimes f(A)) \\ &\underset{\sim}{\xrightarrow{p_d}} f(g(\mathbb{1}) \otimes A) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes f(A).\end{aligned}$$

Lemme 1.41. *Les deux diagrammes suivants commutent (pour tout objet A de $\mathcal{M}$) :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "\mathrm{cd}"] \arrow[d, "\mathrm{cu}"'] & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\mathrm{u}"] & \mathrm{H} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f(A) \arrow[r, "\mathrm{cd}_A"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[d, "\mathrm{cu} \otimes \mathrm{id}"] \\ & \mathbb{1} \otimes f(A). \end{tikzcd}$$

Démonstration. On montre seulement la commutativité du carré. Notons m la multiplication de l'algèbre $g(\mathbb{1})$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1}) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] \arrow[d, "m"'] & g(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \arrow[d, "\delta"] \\ g(\mathbb{1}) & g(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}). \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

commute. On déduit que la flèche composée $\mathrm{m} \circ \mathrm{cd}$ est égale à la composition de

$$fg(\mathbb{1}) \simeq feugfg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\delta} fgfg(\mathbb{1}) \xrightarrow{fg(\delta)} fg(\mathbb{1}).$$

Or, le diagramme

$$\begin{tikzcd} fg(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\delta"'] & feugfg(\mathbb{1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & fgfg(\mathbb{1}) \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "\sim"] & feug(\mathbb{1}) \arrow[r, "\delta"] & fg(\mathbb{1}) \end{tikzcd}$$

commute pour des raisons triviales. De plus, la composition de la ligne horizontale inférieure est l'unité de H. En effet, cette composition est un morphisme d'algèbres untaires de $\mathbb{1}$ dans H. □

Proposition 1.42. *La transformation naturelle* $\mathrm{cd} : f(-) \to \mathrm{H} \otimes f(-)$ *est une opération multiplicative et unitaire.*

Démonstration. Soient A et B deux objets de $\mathcal{M}$. En utilisant le lemme 1.30, on obtient que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
g(\mathbb{1} \otimes f(A)) \otimes g(\mathbb{1} \otimes f(B)) \arrow[r, "p_d \otimes p_d", "\sim"'] \arrow[d, "m"'] & (g(\mathbb{1}) \otimes A) \otimes (g(\mathbb{1}) \otimes B) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}", "\sim"'] \\
g((\mathbb{1} \otimes f(A)) \otimes (\mathbb{1} \otimes f(B))) \arrow[d, "\sim"'] & (g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "m"] \\
g(\mathbb{1} \otimes f(A \otimes B)) \arrow[r, "p_d", "\sim"'] & g(\mathbb{1}) \otimes (A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

commute. En appliquant le foncteur f au diagramme précédent et en utilisant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f(A) \otimes f(B) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\sim"'] & f(A \otimes B) \arrow[d, "\sim"] \\
feugf(A) \otimes feugf(B) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\delta \otimes \delta"'] & feugf(A \otimes B) \arrow[d, "\delta"] \\
fgf(A) \otimes fgf(B) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\sim"'] & fgf(A \otimes B) \arrow[d, "\sim"] \\
fg(\mathbb{1} \otimes f(A)) \otimes fg(\mathbb{1} \otimes f(B)) \arrow[r, "m"] & fg(\mathbb{1} \otimes (f(A) \otimes f(B))),
\end{tikzcd}$$

il est aisé de déduire que la transformation naturelle cd est multiplicative. Pour montrer que cd est unitaire, on peut utiliser la proposition 1.47 ci-dessous. On peut également donner une preuve directe inspirée de la fin de la preuve de cette même proposition. Il reste donc à vérifier que le triangle du lemme 1.37 commute pour $t = \mathrm{cd}$. On utilise encore une fois la proposition 1.47 ci-dessous et le fait que $(fe(A'), \mathrm{ca}_{e(A')})$ est un H-comodule trivial. □

Définition 1.43. On appelle $\iota : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ la composition de

$$\mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{cd}} \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{cu}} \mathrm{H} \otimes \mathbb{1} \simeq \mathrm{H}.$$

Lemme 1.44. *Soient E une algèbre unitaire de $\mathcal{E}$ et $a : \mathrm{H} \to E$ un morphisme d'algèbres unitaires. On définit une opération multiplicative et unitaire t'_a par la composition de*

$$t'_a : f(-) \xrightarrow{\mathrm{cd}} \mathrm{H} \otimes f(-) \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} E \otimes f(-).$$

L'opération t'_a correspond via l'identification de la proposition 1.32 *au morphisme d'algèbres donné par la composition de* $\mathrm{H} \xrightarrow{\iota} \mathrm{H} \xrightarrow{a} E$.

Démonstration. On doit calculer $\beta(t'_a)$ (avec les notations de la preuve de la proposition 1.32). Il s'agit d'un calcul immédiat qu'on laissera au lecteur. □

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 1.45. *La bialgèbre* H *est une algèbre de Hopf d'antipode* ι.

La preuve du théorème 1.45 repose sur les deux propositions suivantes.

Proposition 1.46. *Modulo l'isomorphisme composé*

$$fg(\mathbb{1}) \simeq ugfg(\mathbb{1}) \simeq u(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})),$$

la flèche ι correspond à la permutation des facteurs. En d'autres termes, le diagramme

$$\begin{tikzcd} fg(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\iota"'] & ugfg(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] & ug(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \arrow[r, "p_d", "\sim"'] & u(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \arrow[d, "\tau"] \\ fg(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] & ugfg(\mathbb{1}) \arrow[r, "\sim"] & ug(\mathbb{1} \otimes fg(\mathbb{1})) \arrow[r, "p_d", "\sim"'] & u(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \end{tikzcd}$$

est commutatif. En particulier, ι est une involution.

Démonstration. Appelons ι' l'involution de l'énoncé. Il suffit de montrer que $\iota \circ \iota'$ est l'identité. En reprenant les définitions de ι et ι', on voit que $\iota \circ \iota'$ est la composition de

$$\begin{aligned} fg(\mathbb{1}) \simeq feugfg(\mathbb{1}) &\overset{\sim}{\to} feu(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \overset{\tau}{\to} feu(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \overset{\sim}{\to} feugfg(\mathbb{1}) \\ &\overset{\delta}{\to} fgfg(\mathbb{1}) \overset{\sim}{\to} f(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \overset{\sim}{\to} fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{cu}} fg(\mathbb{1}) \otimes \mathbb{1} \simeq fg(\mathbb{1}). \end{aligned}$$

On déduit immédiatement que $\iota \circ \iota'$ est la composition de

$$\begin{aligned} fg(\mathbb{1}) \simeq feugfg(\mathbb{1}) &\overset{\delta}{\to} fgfg(\mathbb{1}) \overset{\sim}{\to} f(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \\ &\underset{\sim}{\overset{\tau}{\to}} f(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \overset{\sim}{\to} fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1}) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{cu}} fg(\mathbb{1}) \otimes \mathbb{1} \simeq fg(\mathbb{1}). \end{aligned}$$

C'est donc la composition de $\mathrm{H} \overset{\mathrm{cd}}{\to} \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{cu} \otimes \mathrm{id}} \mathbb{1} \otimes \mathrm{H} \simeq \mathrm{H}$. Par le lemme 1.41, c'est aussi l'identité. □

Proposition 1.47. *Soit A un objet de $\mathcal{M}$. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} f(A) \arrow[r, "\mathrm{cd}_A"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ca}_A"] & \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes f(A)) \arrow[r, "\sim"] & (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes f(A) \arrow[d, "\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}"] \\ \mathbb{1} \otimes f(A) \arrow[rrr, "\mathrm{u}"] & & & \mathrm{H} \otimes f(A) \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. On doit calculer la composition de

$$f(A) \xrightarrow{\mathrm{cd}_A} \mathrm{H} \otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ca}_A} \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes f(A)) \simeq (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}} \mathrm{H} \otimes f(A). \tag{15}$$

Les deux diagrammes suivants commutent pour des raisons triviales :

$$\begin{tikzcd}
f(A) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\sim"'] & fgf(A) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[d, "\sim"] \\
feugf(A) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\delta"'] & feugfgf(A) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\delta"] & feugf(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[d, "\delta"] \\
fgf(A) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "p_d"', "\sim"] & fgfgf(A) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "p_d"] & fgf(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[d, "\sim"', "p_d", "\times\times" description] \\
f(g(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[r, "\eta", "\times" description] & f(g(\mathbb{1}) \otimes gf(A)) \arrow[r, "\theta", "\sim"', "\times\times" description] & f(g(\mathbb{1}) \otimes (g(\mathbb{1}) \otimes ef(A))),
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
f(g(\mathbb{1}) \otimes A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\eta"', "\times" description] & fg(\mathbb{1}) \otimes f(A) \arrow[d, "\eta"] \\
f(g(\mathbb{1}) \otimes gf(A)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\theta"', "\sim", "\times" description] & fg(\mathbb{1}) \otimes fgf(A) \arrow[d, "\sim"', "\theta"] \\
f(g(\mathbb{1}) \otimes (g(\mathbb{1}) \otimes ef(A))) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & fg(\mathbb{1}) \otimes f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[d, "\sim"] \\
f((g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \otimes ef(A)) \arrow[d, "\sim"'] & fg(\mathbb{1}) \otimes (fg(\mathbb{1}) \otimes f(A)) \arrow[d, "\sim"] \\
f(g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \otimes f(A) \arrow[r, "\sim"] & (fg(\mathbb{1}) \otimes fg(\mathbb{1})) \otimes f(A).
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme 1.16, on peut former le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
f(g(\mathbb{1}) \otimes (g(\mathbb{1}) \otimes ef(A))) \arrow[rr, "c_d", "\sim"', "\times\times" description] \arrow[d, "\sim"'] & & fgf(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[d, "\sim"] \\
f((g(\mathbb{1}) \otimes g(\mathbb{1})) \otimes ef(A)) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] \arrow[dr, bend right, "m"'] & f(gfg(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] \arrow[d, "\delta"] & fg(fg(\mathbb{1}) \otimes fef(A)) \arrow[d, "\delta"] \\
& f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \arrow[r, "c_d", "\sim"'] & fg(\mathbb{1} \otimes fef(A)).
\end{tikzcd}$$

En recollant les trois diagrammes ci-dessus selon les flèches croisées et doublement croisées, on déduit que la composition de (15) est égale à celle de

$$\begin{aligned}
(16) \qquad f(A) &\xrightarrow{\eta} fgf(A) \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \xrightarrow{\sim} feugf(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \\
&\xrightarrow{\delta} fgf(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \simeq fg(fg(\mathbb{1}) \otimes fef(A)) \xrightarrow{\delta} fg(\mathbb{1} \otimes fef(A)) \\
&\underset{\sim}{\xrightarrow{p_d}} f(g(\mathbb{1}) \otimes ef(A)) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes fef(A) \simeq fg(\mathbb{1}) \otimes f(A).
\end{aligned}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
f(g(\mathbb{1})\otimes ef(A)) & \xrightarrow{\sim} & feugf(g(\mathbb{1})\otimes ef(A)) & \xrightarrow{\delta} & fgf(g(\mathbb{1})\otimes ef(A)) \\
\sim\downarrow & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
fg(\mathbb{1})\otimes fef(A) & \xrightarrow{\sim} & feug(fg(\mathbb{1})\otimes fef(A)) & \xrightarrow{\delta} & fg(fg(\mathbb{1})\otimes fef(A)) \\
\delta\downarrow & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\
\mathbb{1}\otimes fef(A) & \xrightarrow{\sim} & feug(\mathbb{1}\otimes fef(A)) & \xrightarrow{\delta} & fg(\mathbb{1}\otimes fef(A)) \\
\sim\downarrow & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
f(A) & \xrightarrow{\sim} & feugf(A) & \xrightarrow{\delta} & fgf(A)
\end{array}$$

commute pour des raisons triviales. Il s'ensuit que la composition de (16) est égale à celle de

$$\begin{aligned}
(17)\qquad f(A) &\xrightarrow{\eta} fgf(A) \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1})\otimes ef(A)) \xrightarrow{\sim} fg(\mathbb{1})\otimes fef(A) \\
&\xrightarrow{\delta} \mathbb{1}\otimes fef(A) \simeq f(A) \simeq feugf(A) \xrightarrow{\delta} fgf(A) \\
&\underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1})\otimes ef(A)) \simeq fg(\mathbb{1})\otimes fef(A) \simeq fg(\mathbb{1})\otimes f(A).
\end{aligned}$$

La composition des cinq premières flèches de (17) est l'identité. En effet, modulo des identifications évidentes, il s'agit de la composition de

$$f(A) \xrightarrow{\mathrm{ca}} \mathrm{H}\otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{cu}\otimes\mathrm{id}} \mathbb{1}\otimes f(A) \simeq f(A).$$

On a donc montré que la composition de (15) est égale à celle de

$$f(A) \simeq feugf(A) \xrightarrow{\delta} fgf(A) \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1})\otimes ef(A)) \simeq fg(\mathbb{1})\otimes fef(A) \simeq fg(\mathbb{1})\otimes f(A).$$

Toutes les flèches ci-dessus sont naturelles en $f(A)$. En d'autres termes, on peut considérer pour A' dans $\mathcal{E}$ la composition de

$$(18)\qquad A' \simeq feug(A') \xrightarrow{\delta} fg(A') \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1})\otimes e(A')) \simeq fg(\mathbb{1})\otimes A',$$

et lorsqu'on prend $A' = f(A)$ on retrouve la composition de (15).

Pour terminer, il nous reste à montrer que la composition de (18) est égale à celle de

$$A' \simeq \mathbb{1}\otimes A' \xrightarrow{\mathrm{u}\otimes\mathrm{id}} \mathrm{H}\otimes A'.$$

On peut pour cela remplacer A' par $fe(A')$. L'isomorphisme $fe(A') \simeq feugfe(A')$ utilisé dans (18) est alors égal à l'unité $\eta : fe(A') \to feugfe(A')$ de l'adjonction (fe, ug). C'est donc la composition de deux morphismes d'unité :

$$fe(A') \xrightarrow{\eta} feue(A') \xrightarrow{\eta} feugfe(A').$$

On déduit aussitôt que la composition de (18) (pour l'objet $fe(A')$) est égale à la composition de

$$fe(A') \xrightarrow{\eta} fgfe(A') \underset{\sim}{\xrightarrow{\theta}} f(g(\mathbb{1})\otimes efe(A')) \simeq fg(\mathbb{1})\otimes fe(A')$$

qui n'est autre que le morphisme structural $\mathrm{ca}_{e(A')}$ du H-comodule $fe(A')$. Le résultat recherché découle maintenant de la troisième partie de la proposition 1.28. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cette section.

Démonstration du théorème 1.45. Soient E une algèbre commutative et unitaire de $\mathcal{E}$ et $a : \mathrm{H} \to E$ un morphisme d'algèbres unitaires. On dispose de deux opérations multiplicatives et unitaires $t_a,\, t'_a : f(-) \to E \otimes f(-)$ (voir la proposition 1.32 et le lemme 1.44). On cherche à calculer l'opération multiplicative et unitaire $t_a \circ t'_a$ (voir les remarques 1.33 et 1.39). Soit A un objet de $\mathcal{M}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f(A) \arrow[r, "\mathrm{cd}_A"] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ca}_A"] \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"'] & \mathrm{H} \otimes (\mathrm{H} \otimes f(A)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "a\otimes a\otimes\mathrm{id}"] & (\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}) \otimes f(A) \arrow[r, "\mathrm{m}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "a\otimes a\otimes\mathrm{id}"] & \mathrm{H} \otimes f(A) \arrow[d, "a\otimes\mathrm{id}"] \\
& E \otimes f(A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ca}_A"'] & E \otimes (E \otimes f(A)) \arrow[r, "\sim"] & (E \otimes E) \otimes f(A) \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] & E \otimes f(A) \\
& E \otimes (\mathrm{H} \otimes f(A)) \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}\otimes a\otimes\mathrm{id}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

commute. Par la proposition 1.47, la composition de la ligne horizontale supérieure du diagramme ci-dessus est égale à la composition de $f(A) \to \mathbb{1} \otimes f(A) \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathrm{H} \otimes f(A)$. On en déduit aussitôt que $t_a \circ t'_a$ est l'opération triviale donnée par $e : f(-) \simeq \mathbb{1} \otimes f(-) \xrightarrow{u} E \otimes f(-)$. Vu le lemme 1.44, on a donc $t_{a\circ\iota} \circ t_a = e$. En utilisant la proposition 1.46, on obtient également $t_a \circ t_{a\circ\iota} = e$. Vu le corollaire 1.35 et la proposition 1.38, ceci entraîne que $a \circ \iota$ est un inverse à gauche et à droite de a dans le monoïde des morphismes d'algèbres unitaires de H dans E. Il s'ensuit aussitôt que ι est une antipode de H. □

1.5. Fonctorialité et comportement vis à vis de la composition des foncteurs. Dans cette section, on étudie la fonctorialité en f de la bialgèbre H construite dans la section 1.2.

1.5.1. Fonctorialité générale. Pour $i \in \{1, 2\}$, on se donne deux catégories monoïdales $(\mathcal{M}_i, \otimes, \mathbb{1})$ et $(\mathcal{E}_i, \otimes, \mathbb{1})$, ainsi qu'un foncteur monoïdal $f_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{E}_i$. On suppose que f_i admet un adjoint à droite g_i et une 2-section monoïdale e_i telle que l'hypothèse 1.20 est satisfaite. Enfin, on se donne des foncteurs monoïdaux $k : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ et $k : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et des isomorphismes de foncteurs monoïdaux $k \circ f_1 \simeq f_2 \circ k$ et $k \circ e_1 \simeq e_2 \circ k$. On supposera que la composition des isomorphismes $k \simeq k f_1 e_1 \simeq f_2 k e_1 \simeq f_2 e_2 k \simeq k$ est l'identité de k.

Par la section 1.2 on dispose de deux bialgèbres biunitaires $\mathrm{H}_1 = f_1 \circ g_1(\mathbb{1})$ et $\mathrm{H}_2 = f_2 \circ g_2(\mathbb{1})$ dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ respectivement. Par ailleurs, on a une transformation naturelle $k g_1 \to g_2 k$ déduite par adjonction de l'isomorphisme $f_2 k \xrightarrow{\sim} k f_1$. Rappelons qu'elle est égale à la composition de

$$k g_1 \xrightarrow{\eta} g_2 f_2 k g_1 \xrightarrow{\sim} g_2 k f_1 g_1 \xrightarrow{\delta} g_2 k.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.48. (a) *La flèche* $\mathrm{n} : k(\mathrm{H}_1) \to \mathrm{H}_2$ *donnée par la composition de* $k f_1 g_1(\mathbb{1}) \simeq f_2 k g_1(\mathbb{1}) \to f_2 g_2 k(\mathbb{1}) \simeq f_2 g_2(\mathbb{1})$ *est un morphisme de bialgèbres biunitaires.*

(b) *Soit X un objet de $\mathcal{M}_1$. On munit $f_2k(X)$ de sa structure naturelle de* H_2*-comodule décrite dans la proposition* 1.28. *On munit $kf_1(X)$ de la structure de* H_2*-comodule obtenue par corestriction suivant* $\mathrm{n} : k(\mathrm{H}_1) \to \mathrm{H}_2$ *à partir de sa structure de* $k(\mathrm{H}_1)$*-comodule déduite de celle de la proposition* 1.28. *L'isomorphisme $kf_1(X) \simeq f_2k(X)$ est alors un isomorphisme de* H_2*-comodules.*

Démonstration. En utilisant le lemme 1.3, on voit immédiatement que n est un morphisme d'algèbres unitaires. On montrera d'abord la seconde partie de l'énoncé (notons que cette partie de l'énoncé se traduit par la commutativité d'un diagramme ayant un sens sans que l'on sache que n est un morphisme de coalgèbres). Pour X dans $\mathcal{M}_1$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
kf_1(X) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dddd, "\sim"] & kf_1g_1f_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & kf_1g_1(\mathbb{1} \otimes f_1(X)) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & kf_1(g_1(\mathbb{1}) \otimes e_1f_1(X)) \arrow[d, "\times" marking, "\sim"] \\
 & f_2kg_1f_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & f_2kg_1(\mathbb{1} \otimes f_1(X)) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d] & f_2k(g_1(\mathbb{1}) \otimes e_1f_1(X)) \arrow[d, "\times" marking, "\sim"] \\
 & f_2g_2kf_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dd, "\sim"] & f_2g_2k(\mathbb{1} \otimes f_1(X)) \arrow[d, "\sim"] & f_2(kg_1(\mathbb{1}) \otimes ke_1f_1(X)) \arrow[d, "\times" marking] \\
 & & f_2g_2(k(\mathbb{1}) \otimes kf_1(X)) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & f_2(g_2k(\mathbb{1}) \otimes e_2kf_1(X)) \arrow[d, "\times" marking, "\sim"] \\
f_2k(X) \arrow[r, "\eta"] & f_2g_2f_2k(X) \arrow[r, "\sim"] & f_2g_2(\mathbb{1} \otimes f_2k(X)) \arrow[r, "\theta", "\sim"'] & f_2(g_2(\mathbb{1}) \otimes e_2f_2k(X)).
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
kf_1(g_1(\mathbb{1}) \otimes e_1f_1(X)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\times" marking, "\sim"] & k(f_1g_1(\mathbb{1}) \otimes f_1e_1f_1(X)) \arrow[d, "\sim"] & \\
f_2k(g_1(\mathbb{1}) \otimes e_1f_1(X)) \arrow[d, "\times" marking, "\sim"] & kf_1g_1(\mathbb{1}) \otimes kf_1e_1f_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & kf_1g_1(\mathbb{1}) \otimes kf_1(X) \arrow[d] \\
f_2(kg_1(\mathbb{1}) \otimes ke_1f_1(X)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\times" marking] & f_2kg_1(\mathbb{1}) \otimes f_2ke_1f_1(X) \arrow[d] & f_2kg_1(\mathbb{1}) \otimes kf_1(X) \arrow[d] \\
f_2(g_2k(\mathbb{1}) \otimes e_2kf_1(X)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\times" marking, "\sim"] & f_2g_2k(\mathbb{1}) \otimes f_2e_2kf_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & f_2g_2k(\mathbb{1}) \otimes kf_1(\mathbb{1}) \arrow[d, "\sim"] \\
f_2(g_2(\mathbb{1}) \otimes e_2f_2k(X)) \arrow[r, "\sim"] & f_2g_2(\mathbb{1}) \otimes f_2e_2f_2k(X) \arrow[r] & f_2g_2(\mathbb{1}) \otimes f_2k(X).
\end{tikzcd}$$

En recollant les deux diagrammes ci-dessus suivant les flèches croisées, on déduit aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
kf_1(X) \arrow[r, "\mathrm{ca}_X"] \arrow[d, "\sim"'] & k(\mathrm{H}_1) \otimes kf_1(X) \arrow[r, "\mathrm{n} \otimes \mathrm{id}"] & \mathrm{H}_2 \otimes kf_1(X) \arrow[d, "\sim"] \\
f_2k(X) \arrow[rr, "\mathrm{ca}_{k(X)}"] & & \mathrm{H}_2 \otimes f_2k(X)
\end{tikzcd}$$

commute. Ceci démontre la seconde partie de la proposition. Enfin, pour voir que n est un morphisme de coalgèbres, on applique ce qui précède à $X = g_1(\mathbb{1})$. Les détails seront laissés au lecteur. □

Dans le reste de la section, on supposera que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ et que le foncteur $k : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est l'identité. On supposera également que $k : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ possède un adjoint à droite l.

Lemme 1.49. *Le morphisme de bialgèbres* $\mathrm{n} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ *est égal à la composition de* $f_1 g_1 \mathbb{1} \simeq f_2 k l g \mathbb{1} \xrightarrow{\delta} f_2 g \mathbb{1}$.

Démonstration. Il s'agit d'un exercice sur les adjonctions qu'on laissera au lecteur. □

Corollaire 1.50. *Supposons que le foncteur $k : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ est une* localisation*, i.e., que l est pleinement fidèle. Alors, le morphisme* $\mathrm{n} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ *est inversible.*

Remarque 1.51. Supposons que le foncteur $k : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ est une localisation et que f_1 vérifie l'hypothèse 1.20 (resp. l'hypothèse 1.40). Même si l'on ignore que f_2 vérifie l'hypothèse 1.20 (resp. l'hypothèse 1.40), on a des isomorphismes canoniques

$$f_1 g_1(\mathbb{1}) \simeq f_2 k l g_2(\mathbb{1}) \simeq f_2 g_2(\mathbb{1}).$$

Vu le corollaire 1.50, il est naturel de munir $\mathrm{H}_2 = f_2 g_2(\mathbb{1})$ de la structure de bialgèbre déduite de H_1. Par ailleurs, pour $A \in \mathcal{M}_2$, les isomorphismes $f_2(A) \simeq f_2 k l(A) \simeq f_1 l(A)$ permettent d'obtenir une structure de H_2-comodule sur $f_2(A)$ à partir de la structure naturelle de H_1-comodule sur $f_1(l(A))$. On en déduit un foncteur $\mathcal{M}_2 \to \mathrm{coMod}(\mathrm{H}_2)$ qui factorise f_2.

On pose $\mathrm{K} = f_1 \circ l(\mathbb{1})$, que l'on munit de sa structure de H_1-comodule décrite dans la proposition 1.28. L'unité de l'algèbre $g_2(\mathbb{1})$ induit une flèche $\mathrm{r} : \mathrm{K} \to \mathrm{H}_1$. C'est la composition de $f_1 l(\mathbb{1}) \xrightarrow{u} f_1 l g_2(\mathbb{1}) \simeq f_1 g_1(\mathbb{1})$. Il est clair que r est un morphisme de H_1-comodules. Par ailleurs, on dispose d'une flèche évidente $\mathrm{v} : \mathrm{K} \to \mathbb{1}$ donnée par la composition de $f_1 l(\mathbb{1}) \simeq f_2 k l(\mathbb{1}) \xrightarrow{\delta} f_2 \mathbb{1} \simeq \mathbb{1}$. Notons le lemme simple suivant dont la preuve est laissée en exercice.

Lemme 1.52. *Avec les notations ci-dessus, on a la relation* $\mathrm{n} \circ \mathrm{r} = \mathrm{u} \circ \mathrm{v}$.

1.5.2. Universalité. On peut utiliser la proposition 1.48 pour montrer que les bialgèbres que nous avons construites dans la section 1.2 sont universelles. Pour cela, on a besoin d'une petite digression. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale. Étant donnée une coalgèbre counitaire (B, cm) de $\mathcal{C}$, rappelons que $\mathrm{coMod}(B)$ désigne la catégorie des B-comodules counitaires.

Lemme 1.53. *Soit (H, m, cm) une bialgèbre commutative et biunitaire de $\mathcal{C}$.*[3] *Le foncteur d'oubli de la coaction o :* $\mathrm{coMod}(H) \to \mathcal{C}$ *admet un adjoint à droite r donné par* $r(-) = (H \otimes (-), cm \otimes \mathrm{id})$. *L'unité de cette adjonction $\eta : \mathrm{id} \to r \circ o$ appliquée à un H-comodule X est la coaction de H sur X. La counité de cette adjonction $\delta : o \circ r \to \mathrm{id}$ est donnée par la composition de* $H \otimes (-) \xrightarrow{cu \otimes \mathrm{id}} \mathbb{1} \otimes (-) \simeq (-)$.

[3] On demande que H est commutative pour que $\mathrm{coMod}(H)$ soit une catégorie monoïdale symétrique. Toutefois, le lecteur vérifiera facilement que le lemme est également vrai pour les bialgèbres biunitaires non nécessairement commutatives.

Démonstration. Soit (X, ca_X) un H-comodule. La compatibilité de la coaction ca_X avec la comultiplication cm entraîne que la flèche $ca_X : X \to H \otimes X = ro(X)$ est un morphisme de H-comodules. On a donc bien une transformation naturelle $\eta : \mathrm{id} \to r \circ o$. Pour montrer le lemme, il faut vérifier les deux relations habituelles entre unité et counité d'une adjonction. Ceci est un exercice facile qu'on laissera au lecteur. □

Lemme 1.54. *Gardons les notations et les hypothèses du lemme* 1.53. *Notons* $c : \mathcal{C} \to \mathrm{coMod}(H)$ *le foncteur qui associe à un objet* Y *de* $\mathcal{C}$ *le* H*-comodule trivial sur* Y*. L'hypothèses* 1.20 *est alors vérifiée pour* o*,* r *et* c*. De plus, l'isomorphisme évident* $o \circ r(\mathbb{1}) \simeq H$ *est un isomorphisme de bialgèbres biunitaires si l'on munit* $o \circ r(\mathbb{1})$ *de la structure de bialgèbre du théorème* 1.21.

Démonstration. La catégorie $\mathrm{coMod}(H)$ est monoïdale et les foncteurs o et c sont monoïdaux et unitaires et vérifient $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = o \circ c$. Ceci démontre la première partie de l'hypothèse 1.20. En revenant aux définitions, on peut montrer que c_d est la composition de

$$c_d : (H \otimes A) \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ca} (H \otimes A) \otimes (H \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (H \otimes H) \otimes (A \otimes X) \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} H \otimes (A \otimes X).$$

Lorsque le H-comodule X est trivial (i.e., dans l'image du foncteur c), cette composition s'écrit

$$\begin{aligned}(H \otimes A) \otimes X \simeq (H \otimes A) \otimes (\mathbb{1} \otimes X) &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes cu \otimes \mathrm{id}} (H \otimes A) \otimes (H \otimes X) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (H \otimes H) \otimes (A \otimes X) \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} H \otimes (A \otimes X).\end{aligned}$$

C'est donc simplement l'isomorphisme d'associativité. En particulier, la seconde partie de l'hypothèse 1.20 est aussi vérifiée. Pour terminer la preuve du lemme, il reste à identifier la bialgèbre $o \circ r(\mathbb{1})$ fournie par le théorème 1.21 avec la bialgèbre H de départ. Il s'agit d'un exercice facile qu'on laissera au lecteur. (Pour montrer que les comultiplications sont les mêmes, il faut utiliser le calcul précédent de c_d dans le cas où X est le H-comodule trivial.) □

Proposition 1.55. *Reprenons les notations et les hypothèses de la section* 1.2*. Soit* K *une bialgèbre commutative et biunitaire de* $\mathcal{E}$*, et supposons donné un triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \mathrm{coMod}(K) \arrow[d, "o"] \\ & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{M}$*, on dispose d'une coaction counitaire de* K *sur* $f(A)$ *qui de plus est naturelle en* A*. Supposons aussi que cette coaction est triviale si* A *est dans l'image de* $e : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$*. Alors, il existe un unique morphisme de bialgèbres biunitaires* $\mathrm{H} \to K$ *suivant lequel la coation de* K *sur* $f(A)$ *se déduit par corestriction de la coaction de* H *sur* $f(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{M}$*.*

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de la proposition 1.48 et des lemmes 1.53 et 1.54. □

2. Les réalisations de Betti et leurs algèbres de Hopf motiviques

Soient k un corps de caractéristique nulle. Suivant [7], nous savons associer à un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ un foncteur de réalisation de Betti. En fait, ce foncteur de réalisation existe dans quatre variantes, selon qu'on considère les motifs effectifs ou stables, avec ou sans transferts. Dans cette section, nous appliquons le formalisme de la section précédente à ce foncteur dans ses deux variantes sans transferts et on étudiera les bialgèbres ainsi obtenues. (On verra dans [8] que les deux variantes avec transferts fournissent les mêmes bialgèbres à isomorphisme près.) Ces deux bialgèbres seront notées $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$ (pour la variante effective) et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$ (pour la variante stable). Nous montrons aussi que $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$ est une algèbre de Hopf.

Nous donnerons ensuite des complexes explicites qui décrivent les algèbres $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$, ainsi que leurs tensorisées par $\mathbb{C}$. Comme application de cela, nous obtiendrons que ces bialgèbres sont (-1)-connexes, i.e., n'ont pas d'homologie en degrés strictement négatifs.

Dans toute cette section, on fixe un anneau commutatif Λ qu'on supposera (pour simplifier) noethérien et de dimension de Krull finie. En pratique, le cas le plus utile est celui où Λ est un anneau de Dedekind ou un quotient d'un tel anneau. On note $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$ la catégorie des complexes de Λ-modules que l'on munit de sa structure de modèles projective, i.e., telle que les fibrations sont les épimorphismes et les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes. On note $\mathbf{D}(\Lambda)$ la catégorie homotopique de cette structure. Les objets compacts de $\mathbf{D}(\Lambda)$ sont les complexes parfaits ; ils sont donc fortement dualisables.

2.1. Constructions et propriétés basiques (version sans transferts). Étant donnée une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$, on notera $\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\Lambda)$ la catégorie des préfaisceaux de Λ-modules sur $\mathcal{C}$. Dans la suite, nous considérons surtout des préfaisceaux de Λ-modules. Ainsi, lorsqu'on ne précise pas la catégorie dans laquelle un préfaisceau prend ses valeurs, c'est que ce dernier est un préfaisceau de Λ-modules. Nous avons aussi la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\Lambda))$ dont les objets peuvent être considérés comme des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$. Si F est un préfaisceau d'ensembles sur $\mathcal{C}$ et $A \in \mathbf{Cpl}(\Lambda)$, nous noterons $F \otimes A = F \otimes A_{\mathrm{cst}}$ (voir [5, définition 4.4.2]) le préfaisceau qui à $U \in \mathcal{C}$ associe le coproduit de $F(U)$ copies de A. Le produit tensoriel dans $\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\Lambda)$ sera aussi désigné par $- \otimes -$. Ceci n'entraînera pas de confusion : un préfaisceau de Λ-modules ne sera jamais considéré comme un préfaisceau d'ensembles. Bien entendu, on utilisera aussi de la notation $-\otimes_\Lambda -$ si l'on veut être plus précis.

2.1.1. Rappels sur les catégories des motifs. Pour un schéma (noethérien) X, on note Sm/X la catégorie des X-schémas quasi-projectifs [4)] lisses que l'on munit de la topologie Nisnevich (désignée par Nis) ou la topologie étale (désignée par ét). Dans la suite, τ désignera un symbole parmi $\{\mathrm{Nis}, \text{ét}\}$. On dispose d'une structure de modèles projective τ-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X,\Lambda))$ (voir [5, proposition 4.4.31]). Le résultat ci-dessous décrit les objets fibrants dans cette structure. Malheureusement, il ne figure pas explicitement dans [5, chapitre 4].

Lemme 2.1. *Un complexe de préfaisceaux $F \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X,\Lambda))$ est projectivement τ-fibrant si et seulement si pour tout X-schéma lisse U, la restriction de F au petit site étale Et/U est projectivement τ-fibrante.*

---

4) Dans la suite, et sauf mention du contraire, tous les X-schémas seront supposés quasi-projectifs. Ceci ne restreint pas la généralité des énoncés locaux pour une topologie plus fine que la topologie de Zariski.

Démonstration. La condition est nécessaire puisque la restriction de Sm/X à Et/U est un foncteur de Quillen à droite par [5, théorème 4.4.50]. Montrons que la condition est suffisante. Supposons donc que la restriction de F à Et/U est projectivement τ-fibrante pour tout $U \in \mathsf{Sm}/X$. On choisit une équivalence τ-locale $u : F \to G$ avec G un complexe de préfaisceaux τ-fibrant. La restriction de u au petit site Et/U est encore une équivalence τ-locale. De plus, les restrictions de F et G à Et/U sont τ-fibrants ; pour F, c'est notre hypothèse de départ, et pour G on utilise encore une fois [5, théorème 4.4.50]. Mais une équivalence τ-locale entre complexes de préfaisceaux τ-fibrants est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. Ceci entraîne que u est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. On en déduit que F est τ-local. Étant donné que tout complexe de préfaisceaux est projectivement fibrant pour la structure projective non localisée, les objets τ-fibrants sont exactement les objets τ-locaux. Il s'ensuit que F est projectivement τ-fibrant. □

Une localisation à la Bousfield de la structure de modèles projective τ-locale fournit la structure projective $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale pour laquelle les flèches $\mathbb{A}^1_Y \otimes \Lambda[n] \to Y \otimes \Lambda[n]$ sont des équivalences faibles pour tout X-schéma lisse Y et tout $n \in \mathbb{Z}$ (voir [5, définition 4.5.12]). On pose

$$\mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(X, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1-\tau}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda))),$$

la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. C'est la catégorie des X-motifs effectifs (sans transferts). Elle est triangulée et monoïdale, et son objet unité est donné par le préfaisceau constant Λ_{cst}. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie et on notera simplement $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(X, \Lambda)$.

On choisit un remplacement projectivement cofibrant T_X du préfaisceau quotient $(\mathbb{A}^1_X \otimes \Lambda)/((\mathbb{A}^1_X - o_X) \otimes \Lambda)$ où o_X est la section nulle de la droite affine relative. On note $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_X}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda)))$ la catégorie des T_X-spectres symétriques de complexes de préfaisceaux sur Sm/X. On munit cette catégorie de la structure projective stable déduite de la structure projective $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale (voir [5, définition 4.5.21]). On pose

$$\mathbf{DA}^{\tau}(X, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st}}\big(\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_X}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda)))\big),$$

la catégorie homotopique de la structure stable $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. C'est la catégorie des X-motifs (sans transferts). Elle est triangulée et monoïdale et son objet unité est $\Lambda_X(0) = \mathrm{Sus}^0_{T_X}(\Lambda_{\mathrm{cst}})$. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie et on notera simplement $\mathbf{DA}(X, \Lambda)$. On dispose d'un foncteur de T_X-suspension infinie $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_X} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(X, \Lambda) \to \mathbf{DA}^{\tau}(X, \Lambda)$ qui est triangulé et monoïdal (voir [5, lemme 4.3.9, proposition 4.3.35, corollaire 4.3.72]). Il admet un adjoint à droite $\mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0$. C'est le foncteur dérivé à droite du foncteur Ev_0 qui associe à un T_X-spectre symétrique son complexe de préfaisceaux placé en niveau 0.

L'objet $\mathrm{Sus}^0_{T_X}(T_X[-2])$ sera noté $\Lambda_X(1)$. C'est un objet inversible pour le produit tensoriel ce qui permet de définir les objets $\Lambda_X(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous noterons simplement $\Lambda(n)$ ces objets. Le produit tensoriel par $\Lambda_X(n)$ est le twist de Tate qu'on désignera simplement par $\dagger \rightsquigarrow \dagger(n)$.

2.1.2. Rappels sur la réalisation de Betti. Comme dans [7], on appellera *espace analytique complexe* un « analytic space » au sens de [19] que l'on supposera implicitement dénombrable à l'infini (i.e., égale à une réunion dénombrable de sous-ensembles compacts). Pour $r \in \mathbb{R}_{>0}$ un réel strictement positif et $z_0 \in \mathbb{C}$ un point de la droite affine complexe, on note $\mathbb{D}^1(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r muni de sa structure complexe évidente. On note simplement $\mathbb{D}^1$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et $\mathbb{D}^n$ le produit cartésien de n copies de $\mathbb{D}^1$. Étant donné un espace analytique complexe X, on pose $\mathbb{D}^n_X = X \times \mathbb{D}^n$.

Pour un espace analytique complexe X, on note $\mathrm{Ouv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X ordonné par l'inclusion et AnSm/X la catégorie des X-espaces analytiques lisses, i.e., des morphismes lisses d'espaces analytiques complexes de but X. (Lorsque $X = \mathrm{pt}$, avec pt l'espace analytique final formé d'un seul point, $\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$ est simplement la catégorie des variétés analytiques complexes ; elle sera également notée CpVar.) Les catégories $\mathrm{Ouv}(X)$ et AnSm/X sont des sites pour les topologies de Grothendieck naturelles engendrées par les prétopologies des recouvrements ouverts. Ce sont les topologies *usuelles* et elles seront désignées par usu. On dispose alors des structures de modèles projectives usu-locales sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Ouv}(X), \Lambda))$ et $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda))$. On pose

$$\mathbf{D}(X, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Ouv}(X), \Lambda))).$$

C'est une catégorie triangulée et monoïdale. Notons aussi l'analogue analytique complexe du lemme 2.1.

Lemme 2.2. *Un complexe de préfaisceaux $F \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda))$ est projectivement* usu-*fibrant si et seulement si pour tout X-espace analytique lisse U, la restriction de F au petit site* $\mathrm{Ouv}(U)$ *est projectivement* usu-*fibrante.*

Démonstration. La preuve du lemme 2.1 s'étend littéralement au cas analytique complexe. □

Une localisation à la Bousfield de la structure de modèles projective usu-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda))$ fournit la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale pour laquelle les flèches $\mathbb{D}^1_Y \otimes \Lambda[n] \to Y \otimes \Lambda[n]$ sont des équivalences faibles pour tout X-espace analytique lisse Y et tout $n \in \mathbb{Z}$ (voir [7]). On pose

$$\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(X, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1-\mathrm{usu}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda))),$$

la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. C'est une catégorie triangulée et monoïdale.

Le morphisme de sites $\iota_X : (\mathsf{AnSm}/X, \mathrm{usu}) \to (\mathrm{Ouv}(X), \mathrm{usu})$, donné par l'inclusion évidente, fournit une adjonction :

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Ouv}(X), \Lambda)) \underset{\iota_{X*}}{\overset{\iota_X^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda)). \tag{19}$$

On a le résultat suivant [7, théorème 1.8].

Théorème 2.3. *L'adjonction* (19) *est une équivalence de Quillen lorsqu'on munit la source de sa structure projective* usu-*locale et le but de sa structure projective* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-*locale. En particulier,* $\mathsf{L}\iota_X^* : \mathbf{D}(X, \Lambda) \to \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(X, \Lambda)$ *est une équivalence de catégories et* $\mathsf{R}\iota_{X*}$ *est un quasi-inverse.*

On choisit un remplacement projectivement cofibrant T_X du préfaisceau quotient $(\mathbb{A}_X^{1,\mathrm{an}} \otimes \Lambda)/((\mathbb{A}_X^{1,\mathrm{an}} - o_X) \otimes \Lambda)$ où $\mathbb{A}_X^{1,\mathrm{an}} = \mathbb{C} \times X$ et o_X est la section nulle. On note

$$\mathbf{Spt}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda)))$$

la catégorie des T_X-spectres symétriques de complexes de préfaisceaux sur AnSm/X. On munit cette catégorie de la structure de modèles projective stable déduite de la structure de modèles projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda))$. On pose

$$\mathbf{AnDA}(X, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1-\mathrm{usu}-\mathrm{st}}\big(\mathbf{Spt}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda)))\big),$$

la catégorie homotopique de la structure stable $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Elle est triangulée et monoïdale.

De [7, lemme 1.10] et [5, proposition 4.3.35], on déduit que le foncteur de suspension infinie et son adjoint à droite Ev_0 fournissent une équivalence de Quillen

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda)) \underset{\mathrm{Ev}_0}{\overset{\mathrm{Sus}_{T_X}^0}{\rightleftarrows}} \mathbf{Spt}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X, \Lambda)))$$

pour la structure $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale sur la source et la structure $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable sur le but. On obtient ainsi une équivalence de catégories $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}_{T_X}^0 : \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(X, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbf{AnDA}(X, \Lambda)$ de quasi-inverse $\mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0$.

Fixons à présent un corps k de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Pour X un k-schéma de type fini, on notera X^{an} l'ensemble des points complexes $X(\mathbb{C})$ muni de sa structure d'espace analytique naturelle. Si Y est un X-schéma lisse, Y^{an} est un X^{an}-espace analytique lisse. D'où un foncteur d'analytification $An_X : \mathsf{Sm}/X \to \mathsf{AnSm}/X^{\mathrm{an}}$ qui induit deux adjonctions de Quillen

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda)) \underset{An_{X*}}{\overset{An_X^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X^{\mathrm{an}}, \Lambda))$$

et

$$\mathbf{Spt}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda))) \underset{An_{X*}}{\overset{An_X^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{Spt}_{T_X^{\mathrm{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/X^{\mathrm{an}}, \Lambda)))$$

avec $T_X^{\mathrm{an}} = An_X^*(T_X)$. Ci-dessus, les catégories sont munies des structures de modèles $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale, $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale, ainsi que leurs variantes stables. Dans [7, §2], ces adjonctions de Quillen sont considérées uniquement pour $\tau = \mathrm{Nis}$. Toutefois, le cas $\tau = \text{ét}$ n'est guère différent puisque le foncteur An_X est également continu lorsque Sm/X est munie de sa topologie étale.

On déduit en passant aux foncteurs dérivés à gauche deux foncteurs triangulés et monoïdaux

$$\mathsf{An}_X^{\mathrm{eff},\tau,*} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(X, \Lambda) \to \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(X^{\mathrm{an}}, \Lambda) \quad \text{et} \quad \mathsf{An}_X^{\tau,*} : \mathbf{DA}^{\tau}(X, \Lambda) \to \mathbf{AnDA}(X^{\mathrm{an}}, \Lambda).$$

Ces foncteurs admettent des adjoints à droite qu'on note respectivement $\mathsf{An}_{X*}^{\mathrm{eff},\tau}$ et An_{X*}^{τ}. Lorsque X est sous-entendu (par exemple, lorsqu'on s'intéresse au cas absolu $X = \mathrm{Spec}(k)$) on omettra la mention de la base X en notant ces foncteurs. Comme avant, si $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie. Notons aussi que ces foncteurs sont compatibles aux foncteurs de suspension infinies, i.e., on a un isomorphisme canonique $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}_{T_X^{\mathrm{an}}}^0 \circ \mathsf{An}_X^{\mathrm{eff},\tau,*} \simeq \mathsf{An}_X^{\tau,*} \circ \mathsf{L}\,\mathrm{Sus}_{T_X}^0$. Pour plus de détails le lecteur peut consulter le début de [7, §2].

Dans la suite de l'article, nous utiliserons « *An* » avec différentes décorations pour désigner les variantes non dérivées des foncteurs déduits du foncteur d'analytification ; nous utiliserons « An » avec différentes décorations pour les variantes dérivées.

Définition 2.4. (a) La réalisation de Betti effective (au-dessus de X) est la composition de

$$\mathsf{Bti}_X^{\mathrm{eff},\tau,*} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(X,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{An}_X^{\mathrm{eff},\tau,*}} \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(X^{\mathrm{an}},\Lambda) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathsf{R}\iota_{X*}}} \mathbf{D}(X^{\mathrm{an}},\Lambda).$$

C'est un foncteur triangulé et monoïdal. Son adjoint à droite sera noté $\mathsf{Bti}_{X*}^{\mathrm{eff},\tau}$.

(b) La réalisation de Betti stable (au-dessus de X) est la composition de

$$\mathsf{Bti}_X^{\tau,*} : \mathbf{DA}^{\tau}(X,\Lambda) \xrightarrow{\mathsf{An}_X^{\tau,*}} \mathbf{AnDA}(X^{\mathrm{an}},\Lambda) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathsf{R}\iota_{X*}\circ \mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0}} \mathbf{D}(X^{\mathrm{an}},\Lambda).$$

C'est un foncteur triangulé et monoïdal. Son adjoint à droite sera noté Bti_{X*}^{τ}.

Lorsque X est sous-entendu (par exemple, lorsqu'on s'intéresse au cas absolu $X = \mathrm{Spec}(k)$), on omettra la mention de la base en notant les réalisations de Betti. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie.

2.1.3. Les bialgèbres associées aux réalisations de Betti. Comme avant, k est un corps muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. On dispose d'un foncteur

$$(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{Cpl}(\Lambda) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda))$$

qui à un complexe de Λ-modules A associe le préfaisceau constant A_{cst} de valeur A. Il admet un adjoint à droite $\Gamma(k,-)$ qui à un complexe de préfaisceaux F associe $F(\mathrm{Spec}(k))$. Clairement, $((-)_{\mathrm{cst}}, \Gamma(k,-))$ est une adjonction de Quillen lorsqu'on munit $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda))$ de l'une de ses structures projectives (non localisée, τ-locale ou $(\mathbb{A}^1,\tau)$-locale). En fait, $(-)_{\mathrm{cst}}$ envoie les quasi-isomorphismes de $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$ sur des quasi-isomorphismes de complexes de préfaisceaux, de sorte qu'il se dérive trivialement. On dispose donc d'un foncteur

$$(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda).$$

Il est triangulé et monoïdal. On note aussi $(-)_{\mathrm{cst}}^{\Sigma} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda)$ le foncteur composé $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}_{T_k}^0 \circ (-)_{\mathrm{cst}}$.

Lemme 2.5. *Le foncteur* $(-)_{\mathrm{cst}}$ *(resp.* $(-)_{\mathrm{cst}}^{\Sigma}$ *) est une* 2*-section à*

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda) \quad (\textit{resp.}\ \mathsf{Bti}^{\tau,*} : \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda))$$

dans la 2*-catégorie des catégories triangulées et monoïdales.*

Démonstration. En effet, on dispose aussi d'un foncteur analogue

$$(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{Cpl}(\Lambda) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/k,\Lambda)).$$

C'est également un foncteur de Quillen à gauche et le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}(\Lambda) \arrow[r, "(-)_{\mathrm{cst}}"] \arrow[dr, "(-)_{\mathrm{cst}}"'] & \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \arrow[d, "\mathsf{An}^{\mathrm{eff},\tau,*}"] \\ & \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda) \end{tikzcd}$$

commute à un isomorphisme près. Or, $(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda)$ n'est autre que le foncteur $\mathsf{L}\iota_{\mathrm{pt}}^{*}$ qui est une équivalence de catégories par [7, théorème 1.8]. Notre assertion, dans le cas effectif, découle maintenant de la définition de la réalisation de Betti. Le cas stable se démontre de la même manière. □

Notons le lemme utile suivant.

Lemme 2.6. *Les foncteurs* $\mathsf{Bti}_{*}^{\mathrm{eff},\tau} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda)$ *et* $\mathsf{Bti}_{*}^{\tau} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda)$ *commutent aux sommes infinies.*

Démonstration. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$ on peut donner une preuve très courte. En effet, dans ce cas $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$ (resp. $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$) est compactement engendrée par [5, théorème 4.5.67]. Or, le foncteur $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}$ (resp. Bti^{*}) envoie un objet compact sur un complexe parfait de Λ-modules (ceci découle par exemple du fait que tout motif compact est fortement dualisable). On peut donc appliquer [4, lemme 2.1.28] pour conclure. L'argument précédent est encore valable si $\tau = \text{ét}$ et si la dimension cohomologique de k est finie pour les Λ-modules. (C'est donc toujours le cas si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre !) Cependant, le lemme est vrai sans cette hypothèse, mais la preuve est alors plus compliquée. Nous fournissons les détails dans le cas général pour le lecteur intéressé.

On traite uniquement la cas stable ; le cas effectif se démontre de la même manière avec quelques complications en moins (voir toutefois la fin de la preuve). Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'objets dans $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$. Il s'agit de montrer que

$$\bigoplus_{i\in I} \mathsf{Bti}_{*}^{\tau}(A_i) \to \mathsf{Bti}_{*}^{\tau}\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big) \tag{20}$$

est inversible. On peut supposer que les A_i sont cofibrants. Notons $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$. On choisit des cofibrations triviales de buts fibrants

$$\mathrm{Sus}^{0}_{T_k^{\mathrm{an}}}((A_i)_{\mathrm{cst}}) \to \mathbf{F}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{Sus}^{0}_{T_k^{\mathrm{an}}}(A_{\mathrm{cst}}) \to \mathbf{F}$$

relativement à la structure $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable sur $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_X^{\mathrm{an}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt},\Lambda)))$. Il existe alors des morphismes $e_i : \mathbf{F}_i \to \mathbf{F}$ rendant commutatifs les carrés

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sus}^{0}_{T_k^{\mathrm{an}}}((A_i)_{\mathrm{cst}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sus}^{0}_{T_k^{\mathrm{an}}}(A_{\mathrm{cst}}) \arrow[d] \\ \mathbf{F}_i \arrow[r, "e_i"] & \mathbf{F}. \end{tikzcd}$$

De plus, $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{F}_i \to \mathbf{F}$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. Toutefois, il n'est pas clair que cette flèche est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau.

Remarquons que le morphisme (20) est donné par

$$\sum_{i\in I} An_*(e_i) : \bigoplus_{i\in I} An_*(\mathbf{F}_i) \to An_*(\mathbf{F}),$$

où An_* désigne le foncteur image directe suivant $An : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$. On verra que ce morphisme est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau. Autrement dit, on montrera que pour tout $X \in \mathsf{Sm}/k$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ev}_n(\mathbf{F}_i)(X^{\mathrm{an}}) \to \mathrm{Ev}_n(\mathbf{F})(X^{\mathrm{an}})$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de Λ-modules.

Pour cela, on aura besoin d'une petite digression. Soit

$$\mathbf{G} \in \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_X^{\mathrm{an}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}, \Lambda)))$$

un T_k^{an}-spectre fibrant pour la structure stable $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. On a alors une chaîne d'isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{Ev}_n(\mathbf{G})(X^{\mathrm{an}}) &\simeq \Gamma\big(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_0\, \underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{Sus}^n_{T_k^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}} \otimes \Lambda), \mathbf{G})\big)\\ &\simeq \Gamma\big(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_0\, \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{An}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda)), \mathbf{G})\big).\end{aligned}$$

Or, $\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_0(-)) : \mathbf{AnDA}(\mathrm{pt}, \Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ est une équivalence de catégories monoïdales fermées. Il commute donc aux bifoncteurs $\underline{\mathsf{Hom}}(-,-)$ et on peut prolonger la chaîne d'isomorphismes ci-dessus par

$$\simeq \underline{\mathsf{Hom}}\big(\mathsf{Bti}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda)), \Gamma(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_0(\mathbf{G}_0))\big).$$

En appliquant le raisonnement précédent à $\mathbf{F}$ et aux $\mathbf{F}_i$, on est ramené à montrer que le morphisme

$$\bigoplus_{i\in I} \underline{\mathsf{Hom}}\big(\mathsf{Bti}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda)), A_i\big) \to \underline{\mathsf{Hom}}\big(\mathsf{Bti}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda)), A\big)$$

est inversible. Autrement dit, il faut montrer que le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Bti}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda)), -)$ commute aux sommes infinies. Ceci aurait été le cas si l'on savait que le complexe de Λ-modules $\mathsf{Bti}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda))$ est fortement dualisable dans $\mathbf{D}(\Lambda)$. Puisque $\mathsf{Bti}^{\tau,*}$ est un foncteur monoïdal, symétrique et unitaire, il suffira de savoir que $\mathrm{Sus}^n_{T_k}(X \otimes \Lambda) \in \mathbf{DA}^{\tau}(k, \Lambda)$ est fortement dualisable. Cette propriété découle formellement de [4, proposition 2.2.27, théorèmes 2.3.73, 2.3.75]. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [39] ou [6, lemme 1.3.29] (qui traitent le cas $\tau = \mathrm{Nis}$).

On termine la preuve de ce lemme en notant que dans le cas effectif, on se retrouve avec la tâche de vérifier que $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}(X \otimes \Lambda)$ est fortement dualisable. Or, l'objet $X \otimes \Lambda \in \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda)$ n'est pas fortement dualisable en général. Mais heureusement, on a un isomorphisme

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}(X \otimes \Lambda) \simeq \mathsf{Bti}^{\tau,*}(\mathrm{Sus}^0_{T_k}(X \otimes \Lambda)),$$

ce qui permet tout de même de conclure. □

Proposition 2.7. (a) *Le foncteur de réalisation de Betti effective*

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$$

satisfait à l'hypothèse 1.20 *avec e le foncteur* $(-)_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k,\Lambda)$.

(b) *Le foncteur de réalisation de Betti stable*

$$\mathsf{Bti}^{\tau,*} : \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$$

satisfait à l'hypothèse 1.40 *avec e le foncteur* $(-)^{\Sigma}_{\mathrm{cst}} : \mathbf{D}(\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda)$.

Démonstration. La condition (a) de l'hypothèse 1.20 est satisfaite pour les réalisations de Betti effective et stable par le lemme 2.5. Il reste à vérifier la condition (b) de l'hypothèse 1.20 (resp. de l'hypothèse 1.40), i.e., que le morphisme de coprojection

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{*}(A) \otimes B_{\mathrm{cst}} \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{*}(A \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}(B_{\mathrm{cst}})) \tag{21}$$

$$(\text{resp. } \mathsf{Bti}^{\tau}_{*}(A) \otimes M \to \mathsf{Bti}^{\tau}_{*}(A \otimes \mathsf{Bti}^{\tau,*}(M))\,) \tag{22}$$

est inversible pour tout et $A \in \mathbf{D}(\Lambda)$ et $B \in \mathbf{D}(\Lambda)$ (resp. $M \in \mathbf{DA}^{\tau}(k,\Lambda)$). Par le lemme 2.6, le foncteur $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{*}$ (resp. Bti^{τ}_{*}) commute aux sommes infinies. Il suffit donc de vérifier que (21) (resp. (22)) est inversible avec $B = \Lambda$ (resp. M de la forme $\mathrm{Sus}^{n}_{T_k}(X \otimes \Lambda)$ avec $X \in \mathsf{Sm}/k$ et $n \in \mathbb{N}$). En particulier, on peut supposer que B (resp. M) est fortement dualisable. Le résultat découle maintenant du lemme 2.8 ci-dessous. □

Lemme 2.8. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux catégories monoïdales, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un foncteur monoïdal, et $g : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ son adjoint à droite. Pour que le morphisme de coprojection $g(-) \otimes B \to g(- \otimes f(B))$ soit inversible, il suffit que $B \in \mathcal{M}$ soit fortement dualisable.*

Démonstration. Étant donné un objet † de $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N}$, on notera $t_{\dagger}$ le foncteur $-\otimes\dagger$. Soit C un dual fort de B, i.e., il existe des flèches $\delta : B \otimes C \to \mathbb{1}$ et $\eta : \mathbb{1} \to C \otimes B$ qui font de t_C un adjoint à gauche de t_B. Comme f est monoïdal, symétrique et unitaire, on déduit que $f(C)$ est un dual fort de $f(B)$ et donc que $t_{f(C)}$ est un adjoint à gauche de $t_{f(B)}$. Par ailleurs, on a un isomorphisme évident $t_{f(C)} \circ f \simeq f \circ t_C$. En utilisant les adjonctions (f,g), (t_C, t_B) et $(t_{f(C)}, t_{f(B)})$, on déduit un isomorphisme de foncteurs $\beta : t_B \circ g \simeq g \circ t_{f(B)}$. Il reste à voir que cet isomorphisme coïncide avec le morphisme de coprojection de l'énoncé. Cette vérification est omise. □

Les théorèmes 1.21 et 1.45 fournissent donc respectivement une bialgèbre commutative et biunitaire $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{*}\Lambda$ et une algèbre de Hopf commutative $\mathsf{Bti}^{\tau,*}\mathsf{Bti}^{\tau}_{*}\Lambda$ dans $\mathbf{D}(\Lambda)$.

Définition 2.9. (a) On note $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ la bialgèbre $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau,*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\tau}_{*}\Lambda$. C'est la *bialgèbre motivique effective* du corps k (associée au plongement σ).

(b) On note $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ l'algèbre de Hopf $\mathsf{Bti}^{\tau,*}\mathsf{Bti}^{\tau}_{*}\Lambda$. C'est l'*algèbre de Hopf motivique* du corps k (associée au plongement σ).

Remarque 2.10. On a un isomorphisme canonique $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*} \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},\acute{e}t,*} \circ \mathsf{a}_{\acute{e}t}$ avec $\mathsf{a}_{\acute{e}t} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda) \to \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\acute{e}t}(k, \Lambda)$ le foncteur « faisceau étale associé ». Ce dernier admet un adjoint à droite, $\mathsf{R}\,\mathsf{o}_{\acute{e}t}$ qui est pleinement fidèle. Le corollaire 1.50 montre alors que la bialgèbre $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ ne dépend pas, à un isomorphisme canonique près, de la toplogie $\tau \in \{\mathrm{Nis}, \acute{e}t\}$. Le même raisonnement montre qu'il en est de même de $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$.

Le résultat ci-dessous découle de la proposition 1.28.

Proposition 2.11. *Soit M un objet de $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda)$ (resp. $\mathbf{DA}^{\tau}(k, \Lambda)$). Alors, la réalisation de Betti de M est naturellement un comodule counitaire sur $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ (resp. $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$).*

2.1.4. Deux propriétés des bialgèbres motiviques. On garde les notations de la section précédent. Nous allons établir deux propriétés simples des bialgèbres $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ introduites dans la définition 2.9. Dans cette section, nous travaillerons avec la topologie Nisnevich.

Notre première tâche sera de comparer les bialgèbres $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$. Par la construction de la réalisation de Betti, on a un isomorphisme canonique

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*} \simeq \mathsf{Bti}^* \circ \mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k}\ .$$

La proposition 1.48 s'applique pour fournir un morphisme de bialgèbres biunitaires $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \to \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$. Par le lemme 1.49, c'est la composition de

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda \simeq \mathsf{Bti}^*\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k}\ \mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0\,\mathsf{Bti}_*\Lambda \xrightarrow{\delta} \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda.$$

On verra, qu'en tant qu'algèbre commutative et unitaire, $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ est une algèbre de « fractions » dans $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ obtenue en inversant l'image de $1 \in \Lambda$ par un morphisme explicite $\varsigma : \Lambda \to \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$. On commence par introduire ς (ainsi que sa variante stable). On choisit un isomorphisme $s : \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2]) \simeq \Lambda$ (resp. $s : \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \simeq \Lambda$). Par adjonction, s correspond à une flèche $t : T_k[-2] \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda$ (resp. $t : \Lambda(1) \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda$). On définit ς comme étant la composition de

$$\Lambda \xrightarrow{s^{-1}} \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2]) \xrightarrow{\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(t)} \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda = \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$$
$$(\text{resp. } \Lambda \xrightarrow{s^{-1}} \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \xrightarrow{\mathsf{Bti}^*(t)} \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda = \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)\,).$$

Proposition 2.12. *Les flèches ς ne dépendent pas du choix des isomorphismes s. De plus, le triangle*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varsigma"] \arrow[dr, "\varsigma"'] & \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \arrow[d] \\ & \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Rappelons que $\Lambda(1) = \mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k}(T_k[-2])$. On a donc un isomorphisme $\mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2])$. Ainsi, le choix d'un isomorphisme $s : \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2]) \simeq \Lambda$ détermine le choix d'un isomorphisme $s : \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \simeq \Lambda$ et vice versa. Avec ces choix, il est immédiat que le triangle de l'énoncé commute.

Montrons l'indépendance de ς du choix de s. Par ce qui précède, il suffit de traiter le cas effectif. Donnons-nous $s' : \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2]) \simeq \Lambda$ un autre isomorphisme. Appelons $t' : T_k[-2] \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_{*}\Lambda$ et $\varsigma' : \Lambda \to \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ les flèches déduites de s' comme ci-dessus. On pose $a = s' \circ s^{-1}(1)$. C'est un élément inversible de Λ, et on a $t' = (a \times -) \circ t$ où $a \times -$ est l'endomorphisme de multiplication par a sur $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_{*}\Lambda$. On peut alors former le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "s^{-1}", "\sim"'] \arrow[d, "a\times-"', "\sim"] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2]) \arrow[r, "\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(t)"] \arrow[d, equal] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_{*}\Lambda = \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \arrow[d, "\sim"', "a\times-"] \\ \Lambda \arrow[r, "s'^{-1}", "\sim"'] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k[-2]) \arrow[r, "\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(t')"] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_{*}\Lambda = \mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda). \end{tikzcd}$$

Ceci montre que $\varsigma' = \varsigma$. □

Proposition 2.13. *L'élément* $\varsigma(1)$ *de l'anneau commutatif et unitaire* $\mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda))$ *est inversible.*

Démonstration. On construira un inverse à $\varsigma(1)$. On choisit pour cela un isomorphisme $s' : \mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)) \simeq \Lambda$ et on note $t' : \Lambda(-1) \to \mathsf{Bti}_*\Lambda$ la flèche déduite par adjonction. On note ξ la composition de

$$\Lambda \xrightarrow[\sim]{s'^{-1}} \mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)) \xrightarrow{\mathsf{Bti}^*(t')} \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda = \mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda).$$

On montrera l'égalité $\xi(1)\cdot\varsigma(1) = 1$. On choisit l'isomorphisme $s : \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \simeq \Lambda$ de sorte que la composition de

$$\Lambda \simeq \mathsf{Bti}^*\Lambda(0) \simeq \mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)\otimes\Lambda(1)) \simeq \mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)) \otimes \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \xrightarrow[\sim]{s'\otimes s} \Lambda\otimes\Lambda \simeq \Lambda$$

soit l'identité. Ceci est clairement possible. On montrera que la composition de

$$\begin{aligned} (23) \qquad \Lambda \simeq \Lambda\otimes\Lambda &\xrightarrow{s'^{-1}\otimes s^{-1}} \mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)) \otimes \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \\ &\xrightarrow{t'\otimes t} \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda \otimes \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda \xrightarrow{\mathrm{m}} \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda \end{aligned}$$

est le morphisme d'unité de l'algèbre $\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\Lambda$. Ceci entraîne clairement la relation $\xi(1)\cdot\varsigma(1) = 1$. Un calcul facile montre que $m \circ (t' \otimes t) : \Lambda(-1)\otimes\Lambda(1) \to \mathsf{Bti}_*\Lambda$ correspond via l'adjonction $(\mathsf{Bti}^*, \mathsf{Bti}_*)$ à la composition de

$$\mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)\otimes\Lambda(1)) \simeq \mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)) \otimes \mathsf{Bti}^*(\Lambda(1)) \xrightarrow{s'\otimes s} \Lambda\otimes\Lambda \simeq \Lambda,$$

ce qui, par le choix de s, coïncide avec la composition de

$$\mathsf{Bti}^*(\Lambda(-1)\otimes\Lambda(1)) \simeq \mathsf{Bti}^*(\Lambda(0)) \simeq \Lambda.$$

Ceci montre que $m \circ (t' \otimes t)$ est égale à la composition de

$$\Lambda(-1)\otimes\Lambda(1) \simeq \Lambda(0) \xrightarrow{\eta} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\Lambda(0) \simeq \mathsf{Bti}_*\Lambda.$$

Vu le choix de s, on déduit aussitôt que la composition de (23) est égale au morphisme d'unité de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. □

Pour simplifier, on note ς au lieu de $\varsigma(1)$. Les structures d'algèbres sur $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ induisent des morphismes de multiplication par ς. On peut maintenant énoncer le théorème de comparaison entre $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$.

Théorème 2.14. *La famille des flèches composées*

$$\big(\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \xrightarrow{\varsigma^{-n}\times -} \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)\big)_{n\in\mathbb{N}} \tag{24}$$

induit un isomorphisme dans $\mathbf{D}(\Lambda)$ *:*

$$\begin{aligned}\operatorname*{hocolim}_{\mathbb{N}}\big[\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \xrightarrow{\varsigma\times -} \cdots \xrightarrow{\varsigma\times -} \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \xrightarrow{\varsigma\times -} \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \xrightarrow{\varsigma\times -} \cdots\big]\\ \simeq \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda).\end{aligned} \tag{25}$$

Démonstration. Pour la preuve du théorème, on travaillera avec les spectres non symétriques. Ceci est possible grâce à [5, théorème 4.3.79] et au fait que la permutation des facteurs agit trivialement sur $T_k \otimes T_k$ dans $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$.

Soit $\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{an}}}(\Lambda) \to \mathbf{E} = (\mathbf{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un remplacement stablement $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-fibrant, i.e., une cofibration triviale de but un T_k^{an}-spectre fibrant relativement à la structure projective $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale stable sur la catégorie des T_k^{an}-spectres (non symétriques) $\mathbf{Spt}_{T_k^{\mathrm{an}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt},\Lambda)))$. Puisque $T_k^{\mathrm{an}} \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ est un objet inversible de $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda)$, les morphismes $(T_k^{\mathrm{an}})^{\otimes n} \to \mathbf{E}_n$ sont des équivalences $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Par définition, $\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$ est donné par le spectre (non symétrique)

$$\mathbf{F} = \mathsf{An}_*(\mathbf{E}) = (\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Par le lemme 2.15 ci-dessous, $\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$ est la colimite homotopique de la suite

$$\big((\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n))\big)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{26}$$

Par ailleurs, le choix d'un isomorphisme $s : T_k^{\mathrm{an}}[-2] \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda)$ détermine les isomorphismes suivants :

(a) $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k)^{\otimes r}[-2r] \simeq \Lambda$ dans $\mathbf{D}(\Lambda)$ pour $r\in\mathbb{Z}$,

(b) $\mathbf{E}_n[-2n] \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda)$ pour $n\in\mathbb{N}$,

(c) $\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n)[-2n] \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda$ dans $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a des isomorphismes (qui dépendent uniquement de s) :

$$\begin{aligned}(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n)) &\simeq \Lambda[-2n] \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2n]\\ &\simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda = \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda).\end{aligned} \tag{27}$$

Notons $t : T_k[-2] \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda$ le morphisme déduit par adjonction de l'isomorphisme s. Puisque s est la composition de $T_k^{\mathrm{an}}[-2] = \mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}(T_k)[-2] \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}_1[-2] \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathrm{cst}}$, on déduit que t est égal à la composition de

$$T_k[-2] \xrightarrow{c} \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*\mathbf{E}_1[-2] \xrightarrow{\sim} \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda.$$

Ci-dessus, c est la flèche canonique, à savoir la composition de

$$c : T_k \simeq T_k \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes u} T_k \otimes \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_* \mathbf{E_0} \xrightarrow{\gamma} \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_* \mathbf{E}_1.$$

En utilisant cette description de t, on voit que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda[2] \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2n] \arrow[d, "\sim"', "s^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dd, bend left, "\varsigma\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k) \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "c\otimes\mathrm{id}"'] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k) \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2n] \arrow[d, "t\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_1)) \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "m"'] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2] \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2n] \arrow[d, "m"] \\
\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_{n+1})) \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\Lambda[2n+2]
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Autrement dit, modulo les isomorphismes déduits de s, la composition de

$$(28)\qquad \begin{aligned}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k) \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n)) &\to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_1)) \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n)) \\ &\to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_{n+1}))\end{aligned}$$

coïncide avec $\varsigma \times - : \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2n+2] \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*\Lambda[2n+2]$.

Par ailleurs, $\mathsf{An}_*(\mathbf{E})$ est une algèbre dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$. Ceci entraîne que les morphismes d'assemblage du spectre $\mathsf{An}_*(\mathbf{E})$ sont donnés (dans $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$) par la composition de

$$T_k \otimes \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n) \xrightarrow{c\otimes\mathrm{id}} \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_1) \otimes \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_n) \xrightarrow{m} \mathsf{An}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbf{E}_{n+1}).$$

En utilisant le calcul précédent de la composition de (28), on déduit immédiatement que les morphismes de transition dans la suite (26) coïncident, modulo les isomorphismes (27), avec la multiplication par ς dans l'algèbre $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. Ceci donne l'isomorphisme (25) de l'énoncé. Pour terminer, il reste à vérifier que l'isomorphisme qu'on vient de construire est induit par la famille (24). Ceci est laissé au soin du lecteur. □

Lemme 2.15. *Soit* $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un objet de* $\mathbf{Spt}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)))$*, la catégorie de* T_k*-spectres non symétriques. Alors, la famille des flèches composées*

$$(29)\qquad \big((\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathbf{F}_n) \simeq \mathsf{Bti}^*(\mathrm{Sus}^n_{T_k}(\mathbf{F}_n)) \to \mathsf{Bti}^*(\mathbf{F})\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

induit un isomorphisme

$$(30)\qquad \operatorname*{hocolim}_{n\in\mathbb{N}}\big((\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathbf{F}_n)\big) \simeq \mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}).$$

Les flèches de transition dans la colimite ci-dessus sont données par la composition de

$$\begin{aligned}(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathbf{F}_n) &\simeq (\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n-1} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k \otimes \mathbf{F}_n) \\ &\to (\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k))^{\otimes -n-1} \otimes \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathbf{F}_{n+1}),\end{aligned}$$

où la dernière flèche de droite est celle déduite par adjonction du morphisme d'assemblage.

Démonstration. Rappelons que la réalisation de Betti stable $\mathsf{Bti}^* : \mathbf{DA}(k,\Lambda) \to \mathbf{D}(\Lambda)$ est le foncteur composé $\mathsf{R}Q \circ \mathsf{An}^*$ avec Q le foncteur de Quillen à droite $\Gamma(\mathrm{pt}, -) \circ \mathrm{Ev}_0$.

Notons $\mathbf{E} = \mathsf{L}An^*(\mathbf{F})$. Étant donné que $T_k^{\mathrm{an}} \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ est un objet inversible de $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda)$, l'équivalence de catégories $\mathbf{AnDA}(\mathrm{pt},\Lambda) \simeq \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda)$ envoie $\mathbf{E}$ sur $\mathrm{hocolim}_{n\in\mathbb{N}}(T_k^{\mathrm{an}})^{\otimes -n} \otimes \mathbf{E}_n$. Ceci découle de [5, théorème 4.3.61]. De plus, les morphismes de transition dans la colimite ci-dessus sont donnés par les compositions des

$$(T_k^{\mathrm{an}})^{\otimes -n} \otimes \mathbf{E}_n \simeq (T_k^{\mathrm{an}})^{\otimes -n-1} \otimes T_k^{\mathrm{an}} \otimes \mathbf{E}_n \to (T_k^{\mathrm{an}})^{\otimes -n-1} \otimes \mathbf{E}_{n+1};$$

les flèches de droite étant celles déduites par adjonction des morphismes d'assemblage. En appliquant l'équivalence de catégories $\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt},-) : \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda) \simeq \mathbf{D}(\Lambda)$, on déduit un isomorphisme

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{hocolim}}\, \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, T_k^{\mathrm{an}})^{\otimes -n} \otimes \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt},\mathbf{E}_n) \simeq \mathsf{R}Q(\mathbf{E}).$$

Or, $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(T_k) = \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, T_k^{\mathrm{an}})$, $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(\mathbf{F}_n) = \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt},\mathbf{E}_n)$ et $\mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}) = \mathsf{R}Q(\mathbf{E})$. Ceci fournit l'isomorphisme (30) de l'énoncé. La vérification que cet isomorphisme est induit par la famille (29) est laissée au lecteur. □

On passe maintenant à la dépendance vis à vis de l'anneau Λ. Soit Λ' un deuxième anneau, qu'on supposera aussi noethérien et de dimension de Krull finie. Soit $\alpha : \Lambda \to \Lambda'$ un morphisme d'anneaux. Il induit une adjonction de Quillen (α^*, α_*) entre $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$ et $\mathbf{Cpl}(\Lambda')$ avec $\alpha^*(-) = \Lambda' \otimes_\Lambda -$. On en déduit des adjonctions de Quillen au niveau des catégories de préfaisceaux et des catégories de spectres sur Sm/k et $\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$. En dérivant les foncteurs de Quillen à gauche, on obtient des foncteurs triangulés et monoïdaux :

$$\mathsf{L}\alpha^* : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda) \to \mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda') \quad \text{et} \quad \mathsf{L}\alpha^* : \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda) \to \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt},\Lambda'),$$

ainsi que leurs variantes stables que l'on notera également par $\mathsf{L}\alpha^*$. De plus, il est facile de voir que ces foncteurs commutent (à isomorphismes près) avec les foncteurs $\mathsf{An}^{\mathrm{eff},*}$, An^*, $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k}$, $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{an}}}$, $(-)_{\mathrm{cst}}$ et $(-)^{\Sigma}_{\mathrm{cst}}$. On déduit aussitôt des isomorphismes de commutation $\mathsf{L}\alpha^* \circ \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*} \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*} \circ \mathsf{L}\alpha^*$ et $\mathsf{L}\alpha^* \circ \mathsf{Bti}^* \simeq \mathsf{Bti}^* \circ \mathsf{L}\alpha^*$. La proposition 1.48 s'applique pour fournir des morphismes de bialgèbres biunitaires

$$(31)\quad \mathsf{L}\alpha^*\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda') \quad \text{et} \quad \mathsf{L}\alpha^*\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \to \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda').$$

Théorème 2.16. *Les morphismes* (31) *sont inversibles.*

Démonstration. Par le théorème 2.14, il suffit de traiter le cas effectif. En reprenant la construction des morphismes de (31), on voit qu'il suffit de prouver que la transformation naturelle $\mathsf{L}\alpha^* \circ \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_* \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_* \circ \mathsf{L}\alpha^*$ est inversible.

Soit A un complexe de Λ-modules que l'on supposera projectivement cofibrant. On pose $B = \alpha^*(A) = \Lambda' \otimes_\Lambda A$. Soient $s : A_{\mathrm{cst}} \to F$ et $t : B_{\mathrm{cst}} \to G$ des cofibrations triviales de buts fibrants relativement aux structures $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales sur les catégories de complexes de préfaisceaux (de Λ-modules et Λ'-modules) sur $\mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$. Étant donné que α^* est un foncteur de Quillen à gauche, $B = \alpha^*(A) \to \alpha^*(F)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale. Comme G est $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-fibrant, il existe alors une flèche $u : \alpha^*(F) \to G$ telle que $t = u \circ \alpha^*(s)$. Le morphisme $\mathsf{L}\alpha^* \circ \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*(A) \to \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_* \circ \mathsf{L}\alpha^*(A)$ s'identifie alors au morphisme

$An_*(u) : \alpha^*(An_*(F)) = An_*(\alpha^*(F)) \to An_*(G)$. (Rappelons que An_* désigne l'image directe de préfaisceaux suivant le foncteur $An : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$.) Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que $u(X^{\mathrm{an}}) : \alpha^*(F)(X^{\mathrm{an}}) \to G(X^{\mathrm{an}})$ est une équivalence faible pour tout k-schéma de lisse X de type fini.

En utilisant que $\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, -) : \mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt}, \Lambda) \simeq \mathbf{D}(\Lambda)$ est une équivalence de catégories monoïdales fermées, on obtient la chaîne d'isomorphismes :

$$F(X^{\mathrm{an}}) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, \underline{\mathsf{Hom}}(X^{\mathrm{an}} \otimes \Lambda, A_{\mathrm{cst}})) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(X \otimes \Lambda), A).$$

De même, on a l'isomorphisme $G(X^{\mathrm{an}}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(X \otimes \Lambda'), B)$. Modulo ces isomorphismes, la flèche $u(X^{\mathrm{an}})$ s'identifie (dans $\mathbf{D}(\Lambda')$) à la composition de

$$\begin{aligned}\mathsf{L}\alpha^*\big(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{D}(\Lambda)}(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(X \otimes \Lambda), A)\big) &\to \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{D}(\Lambda')}\big(\mathsf{L}\alpha^*(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(X \otimes \Lambda)), \mathsf{L}\alpha^*(A)\big)\\ &\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathbf{D}(\Lambda')}\big(\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(X \otimes \Lambda'), B\big).\end{aligned}$$

Or, la réalisation de Betti de $X \otimes \Lambda \in \mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$ est un objet fortement dualisable de $\mathbf{D}(\Lambda)$. Le lemme ci-dessous permet alors de conclure. □

Lemme 2.17. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des catégories monoïdales fermées, et $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un foncteur monoïdal. Pour que la transformation naturelle $f\underline{\mathsf{Hom}}(A, -) \to \underline{\mathsf{Hom}}(f(A), f(-))$ (voir* [4, définition 2.1.140]*) soit inversible, il suffit que $A \in \mathcal{M}$ soit fortement dualisable.*

Démonstration. Notons C le dual fort de A. Alors $f(C)$ est le dual fort de $f(A)$. On a alors des isomorphismes de foncteurs $\underline{\mathsf{Hom}}(A, -) \simeq C \otimes -$ et $\underline{\mathsf{Hom}}(f(A), -) \simeq f(C) \otimes -$. Il s'agit alors de vérifier que modulo ces isomorphismes, la transformation naturelle de l'énoncé s'identifie à l'isomorphisme évident $f(C \otimes -) \simeq f(C) \otimes f(-)$. Cette vérification est omise. □

2.2. Le théorème d'approximation pour la réalisation de Betti. Le but de cette section est de préparer le terrain pour les calculs de la bialgèbre motivique $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ et de sa version stable $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \Lambda)$ que nous effectuerons dans la section 2.3. Notamment, nous allons établir le théorème d'approximation qui, sous sa forme basique, stipule que l'homologie singulière de la variété des points complexes d'un k-schéma lisse peut se calculer comme l'homologie d'un complexe de chaînes singulières « algébriques » (en un sens à préciser). Pour l'énoncé précis, le lecteur est renvoyé au théorème 2.61. Une bonne partie de cette section est consacrée à l'étude de la $\mathbb{D}^1$-localisation.

On rappelle que $\mathsf{CpVar} = \mathsf{AnSm}/\mathrm{pt}$ est la catégorie des variétés analytiques complexes. À partir de maintenant, on note $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ et $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$ au lieu de $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\mathrm{pt}, \Lambda)$ et $\mathbf{AnDA}(\mathrm{pt}, \Lambda)$.

2.2.1. Le foncteur de $\mathbb{D}^1$-localisation. Dans cette section, on construit un foncteur de $\mathbb{D}^1$-localisation explicite au niveau de la catégorie de modèles $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$ munie de sa structure projective usu-locale. Rappelons qu'il s'agit d'un foncteur $\mathrm{Loc}_{\mathbb{D}^1}$ de cette catégorie de modèles dans elle-même, muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \to \mathrm{Loc}_{\mathbb{D}^1}$, et tel que :

(a) $\mathrm{Loc}_{\mathbb{D}^1}(K)$ est $\mathbb{D}^1$-local en tant qu'objet de $\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$, la catégorie homotopique pour la structure usu-locale,

(b) $K \to \mathrm{Loc}_{\mathbb{D}^1}(K)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale, pour tout complexe de préfaisceaux K. Les deux propriétés ci-dessus caractérisent le complexe $\mathrm{Loc}_{\mathbb{D}^1}(K)$ à un unique isomorphisme près dans la catégorie homotopique de la structure usu-locale.

On note $\overline{\mathsf{CpVar}}$ la catégorie des pro-variétés complexes, i.e., des pro-objets de CpVar. Rappelons qu'il s'agit d'un foncteur covariant $V : I \to \mathsf{CpVar}$ de source une petite catégorie cofiltrante (appelée la catégorie d'indices). Une telle pro-variété complexe sera notée $(V_i)_{i\in I}$. On identifie de la manière habituelle CpVar à la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathsf{CpVar}}$ formée des pro-variétés complexes indexées par un singleton. Étant donné un préfaisceau F sur CpVar (à valeurs dans une catégorie qui possède les colimites filtrantes), on peut prolonger F en un préfaisceau sur $\overline{\mathsf{CpVar}}$ en posant $F((V_i)_{i\in I}) = \mathrm{colim}_{i\in I}\, F(V_i)$ pour $(V_i)_{i\in I} \in \overline{\mathsf{CpVar}}$. On définit de même $\underline{\mathrm{hom}}((V_i)_{i\in I}, F)$ par la colimite des préfaisceaux $\underline{\mathrm{hom}}(V_i, F)$. Pour $X \in \mathsf{CpVar}$, on a $\underline{\mathrm{hom}}((V_i)_{i\in I}, F)(X) \simeq F((V_i \times X)_{i\in I})$.

Pour plus de détails sur la notion de pro-objets (et sa version duale d'ind-objets), le lecteur peut consulter [22, exposé I, §8].

Exemple 2.18. Soient X une variété complexe et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On note $\bar{\mathbb{D}}^n_X$ la pro-variété complexe $(\mathbb{D}_X(o,r)^n)_{r>1}$. Cette pro-variété complexe sera utile dans la suite. Plus généralement, si $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^n_+$, on note $\bar{\mathbb{D}}^n_X(o,R)$ la pro-variété complexe $(\mathbb{D}_X(o,r_1) \times_X \cdots \times_X \mathbb{D}_X(o,r_n))_{r_1>R_1,\dots,r_n>R_n}$.

On introduit maintenant un objet cocubique Σ-enrichi de $\overline{\mathsf{CpVar}}$ (voir l'appendice A) qui jouera dans le contexte analytique complexe le rôle de l'objet cosimplicial $\Delta^\bullet_{\mathrm{top}}$ bien connu en topologie et qui sert à définir le complexe singulier d'un espace topologique.

Définition 2.19. On note $\bar{\mathbb{D}} : \boxplus'' \to \overline{\mathsf{CpVar}}$ l'objet cocubique Σ-enrichi (au sens de la définition A.12) construit de la manière suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\bar{\mathbb{D}}(\underline{\mathbf{1}}^n) = \bar{\mathbb{D}}^n$, la pro-variété complexe $(\mathbb{D}(o,r)^n)_{r>1}$ de l'exemple 2.18.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n+1$ et $\epsilon \in \{0,1\}$, on prend pour $\mathrm{d}_{i,\epsilon} : \bar{\mathbb{D}}^n \to \bar{\mathbb{D}}^{n+1}$ le morphisme de pro-variétés complexes tel que $\mathrm{d}_{i,\epsilon}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},\epsilon,x_i,\dots,x_n)$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \le i \le n$, on prend pour $\mathrm{p}_i : \bar{\mathbb{D}}^n \to \bar{\mathbb{D}}^{n-1}$ le morphisme de pro-variétés complexes tel que $\mathrm{p}_i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \le i \le n-1$, on prend pour $\mathrm{m}_i : \bar{\mathbb{D}}^n \to \bar{\mathbb{D}}^{n-1}$ le morphisme de pro-variétés complexes tel que $\mathrm{m}_i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_i x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_n)$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \Sigma_n$, on prend pour $\sigma : \bar{\mathbb{D}}^n \to \bar{\mathbb{D}}^n$ le morphisme de pro-variétés complexes tel que $\sigma(x_1,\dots,x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)})$.

Ci-dessus, $(x_1,\dots,x_n)$ désigne un n-uplet de nombres complexes de modules inférieurs ou égaux à 1.

Soit $K_\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur CpVar. On associe à $K_\bullet$ l'objet cubique Σ-enrichi $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_\bullet)$ dans la catégorie des complexes de préfaisceaux. En passant aux complexes simples (cf. définition A.4) et normalisés (cf. définition A.10), on obtient des bicomplexes de préfaisceaux $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_\bullet))$ et $\mathrm{N}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_\bullet))$. Si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on a également le bicomplexe $\mathrm{A}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_\bullet))$ obtenu en passant aux complexes alternés (cf. définition A.20). On précise, pour éviter les confusions de signes, que ces bicomplexes sont donnés en degré $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ par $\mathrm{C}_n(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_m))$, $\mathrm{N}_n(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_m))$ et $\mathrm{A}_n(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_m))$.

Définition 2.20. On note $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ et ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ les complexes totaux associés au bicomplexes $\mathrm{C}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$ et $\mathrm{N}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$. (Voir le début de la section A.4 pour les conventions utilisées.) Si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on note également ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ le complexe total associé à $\mathrm{A}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$. Ce sont des complexes de préfaisceaux sur CpVar. On note aussi $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$, ${}^{\mathrm{n}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ et ${}^{\mathrm{a}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ leurs complexes respectifs des sections globales, i.e., obtenus en leur appliquant le foncteur $\Gamma(\mathrm{pt}, -)$. Ce sont les *complexes singuliers* (analytiques) à valeurs dans K.

Remarque 2.21. Pour éviter toute confusion liée aux conventions de signes, on explicite le complexe singulier $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ de la définition 2.20. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{n}(K) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{C}_i(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_{n-i})).$$

La différentielle de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ envoie une section a du préfaisceau $\mathrm{C}_i(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_{n-i}))$ sur $d_K(a) + (-1)^{n-i} d^v(a)$ où d_K est la différentielle de K et d^v est la différentielle du complexe simple associé à $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_{n-i})$. Il en est de même pour les deux autres complexes ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(K)$.

Remarque 2.22. Par la proposition A.11, on a un quasi-isomorphisme canonique $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K) \to {}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$. Si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, on a également, par la proposition A.21, un quasi-isomorphisme canonique $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K) \to {}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$. Dans la suite, nous considérons surtout les complexes $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$. Cependant, la plupart des énoncés portant sur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(-)$ sont encore valables pour la version normalisée ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(-)$ et la version alternée ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(-)$.

On dispose d'un morphisme canonique $K \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ déduit des identifications $K_n \simeq \mathrm{C}_0(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_n))$. On a le résultat suivant.

Théorème 2.23. *Soit K un complexe de préfaisceaux sur* CpVar. *Alors,* $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ *est un objet $\mathbb{D}^1$-local de la catégorie homotopique* $\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$. *De plus, le morphisme canonique $K \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale. Autrement dit,* $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(-)$ *est un foncteur de $\mathbb{D}^1$-localisation relativement à la structure* usu*-locale.*

Démonstration. On divise la preuve en trois étapes. Dans la première étape, on se ramène au cas où le complexe K est concentré en degré 0.

Étape 1. Supposons que K est une colimite d'une $\mathbb{N}$-suite $(K^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes de préfaisceaux. Il suffit alors de montrer le théorème pour chacun des $K^{(n)}$. En effet, le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ commute aux colimites filtrantes et le lemme 2.24 ci-dessous affirme que les $\mathbb{N}$-colimites préservent les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales ainsi que les objets $\mathbb{D}^1$-locaux (relativement à la structure usu-locale). En appliquant cela à $K^{(n)} = \sigma_{\leq n}\tau_{\geq -n}K$, avec $\sigma_{\leq n}$ la troncation bête et $\tau_{\geq -n}$ la troncation canonique, on se ramène au cas où K est borné.

Par ailleurs, le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ préserve les quasi-isomorphismes de préfaisceaux. Il induit donc un endofoncteur triangulé sur $\mathbf{D}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$. Or, les objets $\mathbb{D}^1$-locaux vérifient la propriété 2 de 3 dans les triangles distingués de la catégorie homotopique de la structure usu-locale. Il en est de même des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales dans un morphisme de tels triangles distingués. Une récurrence facile sur la longueur de K nous ramène alors au cas où $K = F[0]$ avec F un préfaisceau sur CpVar. C'est ce cas que l'on considére dans les deux étapes qui suivent.

Étape 2. Dans cette étape, on vérifie que $F[0] \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(F[0])$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Les complexes $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(F[0])$ et $\mathrm{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$ sont les mêmes en tant qu'objets gradués et leurs différentielles sont égales aux signes près (voir la remarque 2.21). En particulier ils sont isomorphes. Il suffit donc de montrer que $F \to \mathrm{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Notons F^c l'objet cubique constant de valeur F. On a un morphisme évident d'objets cubiques $F^c \to \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F)$. De plus, modulo l'isomorphisme $F \simeq \mathrm{C}_{\bullet}(F^c)$, on retrouve $F \to \mathrm{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$ en passant aux complexes simples. Vu le lemme A.3 et la proposition A.8, on déduit aussitôt que le morphisme qui nous intéresse est un rétracté du morphisme $\mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(F^c) \to \mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$. Il suffit donc de montrer que ce dernier est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale.

Par le lemme 2.24, les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales sont stables par les $\mathbb{N}$-colimites. On se ramène donc à montrer que $\sigma_{\leq n}\mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(F^c) \to \sigma_{\leq n}\mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, la classe des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales possède la propriété 2 de 3 dans les morphismes de triangles distingués. Un récurrence immédiate nous ramène alors à montrer que $F \to \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, F)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. On dispose d'une rétraction $o^* : \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, F) \to F$ induite par le centre o du polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$. Il reste à montrer que la composition de $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, F) \to F \to \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, F)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Cette composition est la colimite suivant $r \in \mathbb{N}$ des morphismes

$$\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n, F\big) \xrightarrow{o^*} \underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n, F\big) \tag{32}$$

avec $o : \mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n \to \mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n$ l'application constante qui pointe le centre o. On montrera que la classe du morphisme (32) dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ coïncide avec celle du morphisme i^* induit par l'inclusion évidente de $\mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n$ dans $\mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n$. Ceci permettra de conclure puisque la colimite des $i^* : \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n, F) \to \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n, F)$ est l'identité de $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, F)$.

Le morphisme

$$m : \mathbb{D}(o, 2^{1/r}) \times \mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n \to \mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n,$$

donné par $m(x, z_1, \ldots, z_n) = (xz_1, \ldots, xz_n)$, induit un morphisme

$$m^* : \underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n, F\big) \to \underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{D}(o, 2^{1/r}) \times \mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n, F\big).$$

Par adjonction, on obtient un morphisme

$$\mathbb{D}(o, 2^{1/r}) \otimes \underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{D}(o, 4^{1/r})^n, F\big) \to \underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{D}(o, 2^{1/r})^n, F\big).$$

Ce morphisme définit une homotopie entre i^* et o^*. On conclut maintenant en utilisant l'analogue analytique complexe de [5, lemme 4.5.13 (2)].

Étape 3. On vérifie maintenant que le complexe $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(F)$ est $\mathbb{D}^1$-local. Ce complexe est isomorphe à $\mathrm{C}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$ qui est un facteur direct de $\mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$. Il suffit donc de montrer que ce dernier est $\mathbb{D}^1$-local. Par [7, proposition 1.6], il suffit de montrer que les usu-faisceaux associés aux préfaisceaux d'homologie $H = \mathrm{H}_i(\mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F)))$ sont constants. Par le lemme 2.25 ci-dessus, il suffit de montrer que les deux morphismes

$$0^*,\ 1^* : \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1, H) \to H$$

sont égaux. Or, les deux morphismes de complexes

$$0^*,\ 1^* : \underline{\mathrm{hom}}\big(\bar{\mathbb{D}}^1, \mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))\big) \to \mathrm{C}^{\sharp}_{\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, F))$$

sont homotopes. Une telle homotopie est donnée par les identités

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1 \times \bar{\mathbb{D}}^{m+1}, F) \arrow[r, shift left, "1^*"] \arrow[r, shift right, "0^*"'] \arrow[d] & \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^{m+1}, F) \arrow[d] \arrow[dl, equal] \\
\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1 \times \bar{\mathbb{D}}^{m}, F) \arrow[r, shift left, "1^*"] \arrow[r, shift right, "0^*"'] \arrow[d] & \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^{m}, F) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1 \times \bar{\mathbb{D}}^{1}, F) \arrow[r, shift left, "1^*"] \arrow[r, shift right, "0^*"'] \arrow[d] & \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^{1}, F) \arrow[d] \arrow[dl, equal] \\
\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1 \times \bar{\mathbb{D}}^{0}, F) \arrow[r, shift left, "1^*"] \arrow[r, shift right, "0^*"'] & \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^{0}, F),
\end{tikzcd}$$

modulo les identifications $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1, \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^m, F)) \simeq \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1 \times \bar{\mathbb{D}}^m, F)$. Le théorème est prouvé. □

Les deux lemmes suivants ont été utilisés dans la preuve du théorème 2.23.

Lemme 2.24. *Les $\mathbb{N}$-colimites préservent les équivalences* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locales et les objets $\mathbb{D}^1$-locaux relativement à la structure* usu*-locale sur* $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$.

Démonstration. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} : (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \to (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un morphisme de systèmes inductifs indexés par $\mathbb{N}$. On suppose que chaque f_i est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale de complexes de préfaisceaux sur CpVar. On cherche à montrer que $f = \mathrm{colim}_{i\in\mathbb{N}} f_i$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Puisque les colimites filtrantes préservent les quasi-isomorphismes de complexes de préfaisceaux, on peut supposer que les morphismes de transition des systèmes inductifs $(A'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(B'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des cofibrations projectives. On applique alors [5, lemme 4.2.69] pour conclure.

Par [7, proposition 1.6, théorème 1.8], un complexe de préfaisceaux K est $\mathbb{D}^1$-local (relativement à la structure usu-locale) si et seulement si le morphisme naturel $(K(\mathrm{pt}))_{\mathrm{cst}} \to K$ est une équivalence usu-locale. Or, les équivalences usu-locales sont préservées par les colimites filtrantes. Ceci termine la preuve du lemme. □

Lemme 2.25. *Soit H un préfaisceau sur* CpVar *tel que les deux morphismes* $0^*, 1^* : \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^1, H) \to H$ *sont égaux. Alors, le faisceau* $\mathrm{a}_{\mathrm{usu}}(H)$*, associé à H, est constant.*

Démonstration. Pour $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, notons o (resp. i) l'application nulle (resp. l'inclusion évidente) de $\mathbb{D}(o, 4^{-1/r})^n$ dans $\mathbb{D}(o, 2^{-1/r})^n$. Les deux morphismes

$$\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o, 2^{-1/r})^n, H) \underset{o^*}{\overset{i^*}{\rightrightarrows}} \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o, 4^{-1/r})^n, H)$$

sont égaux. En effet, la double flèche ci-dessus est la composition de

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o,2^{-1/r})^n, H) \arrow[r, "m^*"] & \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o,2^{1/r}) \times \mathbb{D}(o,4^{-1/r})^n, H) \arrow[d, shift right, "0^*"'] \arrow[d, shift left, "1^*"] \\ & \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}(o,4^{-1/r})^n, H) \end{tikzcd}$$

avec

$$m : \mathbb{D}(o,2^{1/r}) \times \mathbb{D}(o,4^{-1/r})^n \to \mathbb{D}(o,2^{-1/r})^n$$

l'application donnée par $m(x,z_1,\ldots,z_n) = (xz_1,\ldots,xz_n)$. On déduit aussitôt que le morphisme évident $H(\mathrm{pt}) \to \lim_{r\in\mathbb{N}} H(\mathbb{D}(o,2^{-1/r})^n)$ est inversible. Ceci entraîne que le morphisme $H_{\mathrm{sep}}(\mathrm{pt}) \to H_{\mathrm{sep}}(\mathbb{D}^n)$ est inversible, avec H_{sep} le préfaisceau séparé associé à H. Le résultat découle maintenant du fait que toute variété complexe admet un recouvrement ouvert par des polydisques. □

Corollaire 2.26. *Soient K un complexe de préfaisceaux sur* CpVar *et K_f un modèle fibrant de K pour la structure projective* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale. Alors, le complexe* $\Gamma(\mathrm{pt}, K_f)$ *est naturellement quasi-isomorphe à* $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(K)$*. Autrement dit, l'image de K par l'équivalence de catégories de* [7, théorème 1.8] *coïncide avec le complexe* $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(K)$ *(à un isomorphisme canonique près dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*).*

Démonstration. En effet par le théorème 2.23, on obtient un modèle $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant de K en prenant un modèle usu-fibrant du complexe $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$. Le résultat découle maintenant du fait que le foncteur $\Gamma(\mathrm{pt}, -)$ envoie les équivalences usu-locales sur des quasi-isomorphismes. En effet, tout recouvrement du point est scindé ! □

Corollaire 2.27. *Soit $f : K \to L$ un morphisme de complexes de préfaisceaux sur* CpVar*. On suppose que f est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale. Alors, il en est de même de* $f : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(L)$*.*

Démonstration. Ceci découle aussitôt du théorème 2.23 et de la propriété 2 de 3 pour les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales. □

Le résultat technique ci-dessus nous sera utile plus tard.

Lemme 2.28. *Soit K un complexe de préfaisceaux sur* CpVar*. On suppose que K est projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrant. Alors, le morphisme* $K \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ *est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. En particulier,* $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ *est aussi projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrant.*

Démonstration. Rappelons que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ est le complexe total associé à $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$. Vu que $K \simeq \mathrm{C}_0(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$, il suffit de montrer que le complexe de préfaisceaux $\mathrm{C}_n(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$ est acyclique dès que $n \geq 1$. Par le lemme A.3, le complexe en question est un facteur direct du complexe $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, K)$ contenu dans le facteur direct

$$\ker\{0^* : \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, K) \to K\}.$$

Il suffira donc de montrer que $0^* : \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, K) \to K$ est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. Ceci est clair puisque K est projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. □

On termine cette section avec quelques compléments concernant le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$. Ces compléments seront utiles plus tard, notamment dans la section 2.2.3. Il s'agit en fait de construire la transformation naturelle t_m (voir (37)) et d'établir le lemme 2.33. On rappelle d'abord la notion de paire.

Définition 2.29. (a) Une *paire analytique complexe* (ou simplement une *paire*) est un couple (X, Z) où X est une variété analytique complexe et Z une partie fermée de X égale à une réunion finie de sous-variétés analytiques complexes fermées de X. Un morphisme de telles paires $f : (X', Z') \to (X, Z)$ est un morphisme de variétés complexes $f : X' \to X$ tel que $f(Z') \subset Z$. Une *pro-paire analytique complexe* (ou simplement une *pro-paire*) est un pro-objet de la catégorie des paires analytiques complexes.

(b) Le *smash-produit* de deux paires analytiques complexes (X_1, Z_1) et (X_2, Z_2) est le couple

$$(X_1 \times X_2, X_1 \times Z_2 \cup Z_1 \times X_2).$$

Cette paire sera notée $(X_1, Z_1) \wedge (X_2, Z_2)$. Le smash-produit de deux pro-paires analytiques complexes $(X_{1,i}, Z_{1,i})_{i\in I}$ et $(X_{2,j}, Z_{2,j})_{j\in J}$ est la pro-paire

$$((X_{1,i}, Z_{1,i}) \wedge (X_{2,j}, Z_{2,j}))_{(i,j)\in I\times J}$$

que l'on note aussi $((X_{1,i}, Z_{1,i})_{i\in I}) \wedge ((X_{2,j}, Z_{2,j})_{j\in J})$.

La catégorie des paires analytiques complexes est une catégorie monoïdale pour le smash-produit. L'objet unité est donné par $(\mathrm{pt}, \emptyset)$. Il en est de même de la catégorie des pro-paires. L'association $X \rightsquigarrow (X, \emptyset)$ définit un plongement pleinement fidèle de CpVar dans la catégorie des paires. Ce plongement transforme le produit direct en smash-produit.

Soit (X, Z) une paire analytique complexe et notons $\tilde{Z}$ l'espace analytique normalisé de Z. Alors $\tilde{Z}$ est une réunion disjointe finie $\bigsqcup_{\alpha\in\pi_0(\tilde{Z})} Z_\alpha$ de sous-variétés connexes Z_α de X. Étant donné un préfaisceau F sur CpVar à valeurs dans une catégorie abélienne, on pose

$$F(X, Z) = \bigcap_{\alpha\in\pi_0(\tilde{Z})} \ker\{F(X) \to F(Z_\alpha)\}.$$

Étant donné un morphisme de paires $(X', Z') \to (X, Z)$, le morphisme $F(X) \to F(X')$ envoie $F(X, Z)$ dans $F(X', Z')$. On obtient de cette manière une extension du préfaisceau F à la catégorie des paires.[5] Si F est à valeurs dans une catégorie abélienne possédant les colimites filtrantes, on peut aussi l'étendre à la catégorie des pro-paires par la formule habituelle $F((X_i, Z_i)_{i\in I}) = \mathrm{colim}_{i\in I} F(X_i, Z_i)$.

Définition 2.30. Soit F un préfaisceau sur CpVar à valeurs dans une catégorie abélienne. Étant donnée une paire (X, Z), on note $\underline{\mathrm{hom}}((X, Z), F)$ le préfaisceau défini par l'association : $U \in \mathsf{CpVar} \rightsquigarrow F(X \times U, Z \times U)$. Si F est à valeurs dans une catégorie abélienne possédant les colimites filtrantes et étant donnée une pro-paire $(X_i, Z_i)_{i\in I}$, on note $\underline{\mathrm{hom}}((X_i, Z_i)_{i\in I}, F)$ la colimite suivant $i \in I$ des préfaisceaux $\underline{\mathrm{hom}}((X_i, Z_i), F)$.

[5] Il s'agit bien d'une extension. En effet, on a $F(X, \emptyset) = F(X)$ pour toute variété complexe X.

Les deux lemmes ci-dessous sont des exercices faciles laissés au lecteur.

Lemme 2.31. *Soient (X_1, Z_1) et (X_2, Z_2) deux paires analytiques complexes. On a alors un isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{hom}}((X_2, Z_2), \underline{\mathrm{hom}}((X_1, Z_1), F)) \simeq \underline{\mathrm{hom}}((X_1, Z_1) \wedge (X_2, Z_2), F).$$

(La propriété analogue pour les pro-paires est également vraie.)

Lemme 2.32. *Le foncteur $\underline{\mathrm{hom}}((X, Z), -)$ admet un adjoint à gauche $(X, Z) \otimes -$. Il envoie un préfaisceau F sur le conoyau du morphisme $\bigoplus_{\alpha\in\pi_0(\tilde{Z})} Z_\alpha \otimes F \to X \otimes F$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier, $r > 1$ un réel et $\epsilon \in \{0, 1\}$, on note $\partial_\epsilon \mathbb{D}(o, r)^n$ la réunion des $\mathrm{d}_{i,\epsilon}(\mathbb{D}(o, r)^{n-1})$ lorsque i parcourt $[\![1, n]\!]$. On note aussi $\partial\mathbb{D}(o, r)^n = \partial_0\mathbb{D}(o, r)^n \cup \partial_1\mathbb{D}(o, r)^n$. On obtient ainsi les pro-paires $(\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_\epsilon\bar{\mathbb{D}}^n) = (\mathbb{D}(o, r)^n, \partial_\epsilon\mathbb{D}(o, r)^n)_{r>1}$ (pour $\epsilon \in \{0, 1\}$) et $(\bar{\mathbb{D}}^n, \partial\bar{\mathbb{D}}^n) = (\mathbb{D}(o, r)^n, \partial\mathbb{D}(o, r)^n)_{r>1}$. Étant donné un complexe $K_\bullet$ de préfaisceaux de Λ-modules sur CpVar, le complexe (en complexes de préfaisceaux) $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$ est donné en degré $n \geq 0$ par $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n), K)$. De plus, sa différentielle en degré $n \geq 1$ est donnée par la somme alternée des morphismes de restriction suivant les inclusions de pro-paires $\mathrm{d}_{i,1} : (\bar{\mathbb{D}}^{n-1}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n-1}) \hookrightarrow (\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n)$.

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on a une identification de pro-paires

$$(\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^m, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^m) = (\bar{\mathbb{D}}^{n+m}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n+m}).$$

Il s'ensuit aussitôt que la pro-paire $(\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m)$ contient la pro-paire $(\bar{\mathbb{D}}^{n+m}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n+m})$. On obtient alors des monomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \mathrm{C}_n(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))\big) \to \mathrm{C}_{n+m}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)) \tag{33}$$

qui sont donnés par la composition de

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n), K)\big) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^n, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), K\big)\\ &\to \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^{n+m}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n+m}), K\big).\end{aligned}$$

Il est alors clair que l'image de (33) est contenue dans le noyau des morphismes $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}$ pour $i \in [\![n + 1, n + m]\!]$. Ceci montre aussitôt que la famille des morphismes (33), étendue par les morphismes nuls lorsque $n < 0$, fournit un morphisme de complexes (en complexes de préfaisceaux)

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))\big) \to \mathrm{C}_{\bullet+m}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)). \tag{34}$$

Il est immédiat de voir que le morphisme (33) envoie $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \mathrm{D}'_n(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)))$ dans $\mathrm{D}'_{n+m}(K)$. Le morphisme (34) induit donc un morphisme de complexes (en complexes de préfaisceaux)

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \mathrm{N}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))\big) \to \mathrm{N}_{\bullet+m}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)). \tag{35}$$

De même, si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, le morphisme (33) commute au projecteur alt^*_n. Vu que $\mathrm{alt}^*_{n+m} \circ \mathrm{alt}^*_n = \mathrm{alt}^*_{n+m}$, le morphisme (34) induit un morphisme de complexes (en complexes de préfaisceaux)

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \mathrm{A}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))\big) \to \mathrm{A}_{\bullet+m}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)). \tag{36}$$

En passant aux complexes totaux dans (34), on obtient une transformation naturelle (en K)

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)\big) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)[-m]^+. \tag{37}$$

Ci-dessus, pour un complexe $A_\bullet$, on a noté $A[-m]^+$ le complexe donné en degré n par A_{m+n} et ayant la même différentielle que A (contrairement à la différentielle de $A_\bullet[-m]$ qui est celle de A multipliée par le facteur $(-1)^m$).[6)] En utilisant (35) et (36), on obtient des transformations naturelles analogues, où $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ est remplacé par ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$, et qu'on notera aussi par t_m. On démontre maintenant le résultat technique suivant.

Lemme 2.33. *Soit $K_\bullet$ un complexe de préfaisceaux sur* CpVar. *Supposons que K est injectivement fibrant. Alors,* (37) *est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux.*

Démonstration. On note ${}^{\mathrm{ng}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ le complexe total associé à ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))$. C'est un sous-complexe de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ qui est envoyé isomorphiquement sur ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)$ (voir la proposition A.8).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r > 1$ un réel, on note $\delta_{1,1}\mathbb{D}(o,r)^n$ la réunion des $\mathrm{d}_{i,\epsilon}(\mathbb{D}(o,r)^{n-1})$ pour $(i,\epsilon) \neq (1,1)$. On obtient ainsi une pro-paire $(\bar{\mathbb{D}}^n, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^n) = (\mathbb{D}(o,r)^n, \delta_{1,1}\mathbb{D}(o,r)^n)_{r>1}$. Le complexe (en complexes de préfaisceaux) ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}, K))$ est donné en degré $n \geq 0$ par $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^n, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^n), K)$. De plus, sa différentielle en degré $n \geq 1$ est l'opposée de la restriction suivant l'inclusion des pro-paires $\mathrm{d}_{1,1} : (\bar{\mathbb{D}}^{n-1}, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^{n-1}) \hookrightarrow (\bar{\mathbb{D}}^n, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^n)$.

Pour $n \geq 1$, on a $(\bar{\mathbb{D}}^n, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^n) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m) = (\bar{\mathbb{D}}^{n+m}, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^{n+m})$ et la pro-paire $(\bar{\mathbb{D}}^0, \emptyset) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m) = (\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m)$ contient $(\bar{\mathbb{D}}^m, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^m)$. On en déduit aussitôt un morphisme de complexes (en complexes de préfaisceaux)

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K))\big) \to {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_{\bullet+m}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)). \tag{38}$$

Par construction, ce morphisme coïncide avec la restriction de (33) au sous-complexe $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K)))$. En passant aux complexes totaux, on déduit donc une transformation naturelle

$$t_m : \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), {}^{\mathrm{ng}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)\big) \to {}^{\mathrm{ng}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)[-m]^+, \tag{39}$$

et il suffit de montrer que cette dernière est un quasi-isomorphisme lorsque K est injectivement fibrant.

On raisonne par induction sur m. Lorsque $m = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons d'abord que $m = 1$. Étant donné que (38) est un isomorphisme en degrés $n \geq 1$, on se ramène à montrer que le morphisme de bicomplexes

$$\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^1, \partial\bar{\mathbb{D}}^1), K) \to \big[\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^1, \delta_{1,1}\bar{\mathbb{D}}^1), K) \xrightarrow{\mathrm{d}_{1,1}^*} K\big]$$

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes totaux. Il suffit de montrer que pour tout réel $r > 1$, le morphisme de bicomplexes

$$\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{D}^1(0,r), \{0,1\}), K) \to \big[\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{D}^1(0,r), \{0\}), K) \xrightarrow{1^*} K\big]$$

6) Bien entendu, lorsque m est pair, on a $(-)[-m]^+ = (-)[-m]$.

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes totaux. Autrement dit, il faut montrer que

$$\underline{\mathsf{Hom}}\big((\mathbb{D}^1(0,r),\{0,1\})\otimes\Lambda, K\big) \to \underline{\mathsf{Hom}}\big(\big[\{1\}\otimes\Lambda \to (\mathbb{D}^1(0,r),\{0\})\otimes\Lambda\big], K\big)$$

est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux. Ceci découle du fait que K est injectivement fibrant et que

$$\big[\{1\}\otimes\Lambda \to (\mathbb{D}^1(0,r),\{0\})\otimes\Lambda\big] \to (\mathbb{D}^1(0,r),\{0,1\})\otimes\Lambda$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux injectivement cofibrants.

Supposons maintenant que $m \geq 2$. On a $(\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m) = (\bar{\mathbb{D}}^{m-1}, \partial\bar{\mathbb{D}}^{m-1}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^1, \partial\bar{\mathbb{D}}^1)$. De plus, modulo cette identification, (39) est la composition de

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^{m-1}, \partial\bar{\mathbb{D}}^{m-1}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^1, \partial\bar{\mathbb{D}}^1), {}^{\mathrm{g}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)\big)\\
&\quad\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^1, \partial\bar{\mathbb{D}}^1), \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^{m-1}, \partial\bar{\mathbb{D}}^{m-1}), {}^{\mathrm{g}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K))\big)\\
&\quad\xrightarrow{t_{m-1}} \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^1, \partial\bar{\mathbb{D}}^1), {}^{\mathrm{g}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)[-m+1]^+\big)\\
&\quad\xrightarrow{t_1} {}^{\mathrm{g}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(K)[-m]^+.
\end{aligned}$$

On conclut maintenant par récurrence. □

2.2.2. Les Λ-spectres symétriques et leur stabilisation. On rassemble dans cette section quelques préliminaires sur les T_{pt}-spectres symétriques. Sauf mention explicite du contraire, on prendra pour T_{pt} le préfaisceau $(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)\otimes\Lambda = (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\otimes\Lambda)/(\{\infty\}\otimes\Lambda)$. Il s'agit bien d'un préfaisceau projectivement cofibrant puisqu'isomorphe à un facteur direct de $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\otimes\Lambda$. De plus, ce préfaisceau est isomorphe dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ au préfaisceau quotient $(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}\otimes\Lambda)/((\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}} - o)\otimes\Lambda)$. L'isomorphisme de foncteurs $T_{\mathrm{pt}}\otimes - \simeq (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)\otimes -$ permet d'identifier la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques (ou non symétriques) avec celle des $[(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)\otimes -]$-spectres symétriques (ou non symétriques) au sens de [5, définition 4.3.6]. Dans la suite, on utilisera librement cette identification.

Étant donné un T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{E}$, on pose $\mathbf{\Lambda}^1(\mathbf{E}) = \mathrm{s}_-(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}))$ avec s_- le foncteur de décalage des niveaux (voir [5, définition 4.3.13]). On dispose d'une transformation naturelle $\lambda_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^1(\mathbf{E})$ donnée au niveau n par la composition de

$$\mathbf{E}_n \xrightarrow{\gamma'_{\mathbf{E}}} \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}_{n+1}) \xrightarrow{\tau_{(n)}^{-1}} \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}_{n+1}),$$

avec $\gamma'_{\mathbf{E}}$ l'adjoint du morphisme d'assemblage de $\mathbf{E}$ et $\tau_{(n)} \in \Sigma_{n+1}$ la permutation cyclique $(123\cdots(n+1))$ agissant sur $\mathbf{E}_{n+1}$. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [5, p. 244–245].

Lemme 2.34. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_{pt}*-spectre symétrique de complexes de préfaisceaux sur* CpVar. *On suppose que* $\mathbf{E}$ *est projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrant niveau par niveau. Supposons également que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha \in \mathrm{H}_*(\mathbf{E}_n(\mathrm{pt}))$*, il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que le morphisme de complexes*

$$\mathbf{E}_n(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\gamma'^r_{\mathbf{E}}} \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r}, \mathbf{E}_{n+r})(\mathrm{pt}) = \mathbf{E}_{n+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})$$

envoie α *sur la classe d'homologie nulle. Alors,* $\mathbf{E}$ *est stablement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-équivalent au* T_{pt}*-spectre symétrique nul.*

Démonstration. On ne restreint pas la généralité en supposant que $\mathbf{E}$ est projectivement cofibrant. Par le lemme de Yoneda, il suffit de vérifier que $\hom_{\mathbf{AnDA}(\Lambda)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = 0$ pour tout T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{F}$. Pour faire cela, on peut supposer que $\mathbf{F}$ est projectivement stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. On a alors $\hom_{\mathbf{AnDA}(\Lambda)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \pi_0(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. En particulier, tout élément dans $\hom_{\mathbf{AnDA}(\Lambda)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ est la classe d'un morphisme $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ de T_{pt}-spectres symétriques.

Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbf{\Lambda}^r = \mathbf{\Lambda}^1 \circ \cdots \circ \mathbf{\Lambda}^1$ (r fois). En utilisant la transformation naturelle $\lambda : \mathrm{id} \to \mathbf{\Lambda}^1$ on peut former la $\mathbb{N}$-suite de transformations naturelles

$$\mathrm{id} = \mathbf{\Lambda}^0 \xrightarrow{\lambda} \mathbf{\Lambda}^1 \xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^1(\lambda)} \mathbf{\Lambda}^2 \to \cdots \to \mathbf{\Lambda}^r \xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^r(\lambda)} \mathbf{\Lambda}^{r+1} \to \cdots .$$

On pose alors $\mathbf{\Lambda}^\infty = \mathrm{colim}_{r \in \mathbb{N}} \mathbf{\Lambda}^r$ et $\lambda^\infty : \mathrm{id} \to \mathbf{\Lambda}^\infty$ la transformation naturelle évidente. On a $\lambda^\infty_{\mathbf{F}} \circ f = \mathbf{\Lambda}^\infty(f) \circ \lambda^\infty_{\mathbf{E}}$ et il est facile de voir que $\lambda^\infty_{\mathbf{F}}$ est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau. Ainsi, pour montrer que la classe de f dans $\hom_{\mathbf{AnDA}(\Lambda)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ est nulle, il suffira de montrer que le T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})$ est $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-équivalent niveau par niveau au complexe nul (et donc, isomorphe dans $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$ au T_{pt}-spectre nul).

L'endofoncteur $\mathbf{\Lambda}^1$ est de Quillen à droite relativement à la structure projective instable déduite de la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale (voir [5, lemmes 4.3.26, 4.3.27]). Ceci entraîne que $\mathbf{\Lambda}^r(\mathbf{E})$ est projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau. Par le lemme 2.24, on déduit que $\mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})$ est $\mathbb{D}^1$-local niveau par niveau. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $\Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})_n)_{\mathrm{cst}} \to \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})_n$ est une équivalence usu-locale de complexes de préfaisceaux sur CpVar. Il suffira donc de montrer que le complexe de Λ-modules $\Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})_n)$ est acyclique. Soit $\alpha_\infty \in \mathrm{H}_*(\Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})_n))$ une classe d'homologie. Pour $s \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on peut trouver une classe d'homologie $\alpha_s \in \mathrm{H}_*(\Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^s(\mathbf{E})_n))$ qui soit envoyée sur α_∞ par le morphisme canonique. On a

$$\Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^s(\mathbf{E})_n) = \mathbf{E}_{n+s}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge s}).$$

De plus, le morphisme composé

$$\mathbf{\Lambda}^{s+r-1}(\lambda) \circ \cdots \circ \mathbf{\Lambda}^s(\lambda) : \Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^s(\mathbf{E})_n) \to \Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^{s+r}(\mathbf{E})_n)$$

est donné, modulo l'action des permutations sur $\mathbf{E}_{n+s+r}$ et $(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r}$, par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{n+s}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge s}) &\xrightarrow{\gamma'^r_{\mathbf{E}}} \underline{\hom}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r}, \mathbf{E}_{n+s+r})((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge s}) \\ &= \mathbf{E}_{n+s+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge s+r}).\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{E}$ est projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau et que $T_{\mathrm{pt}} = (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}$ est isomorphe au complexe $\Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$, le morphisme de complexes ci-dessus s'écrit

$$\mathbf{E}_{n+s}(\mathrm{pt})[-2s] \xrightarrow{\gamma'^r_{\mathbf{E}}} \underline{\hom}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r}, \mathbf{E}_{n+s+r})(\mathrm{pt})[-2s] = \mathbf{E}_{n+s+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})[-2s].$$

En utilisant la dernière condition imposée sur $\mathbf{E}$ dans l'énoncé du lemme, on obtient que l'image de α_s dans l'homologie du complexe $\mathbf{E}_{n+s+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge s+r})$ est nulle pour r suffisamment grand. Ceci entraîne que $\alpha_\infty \in \mathrm{H}_*(\Gamma(\mathrm{pt}, \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})_n))$ est nulle. Le lemme est démontré. □

Rappelons (voir [5, proposition 4.3.11]) que les catégories des T_{pt}-spectres symétriques et non symétriques sont liées par une adjonction

$$\mathbf{Spt}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))) \underset{\mathrm{Oub}^{\Sigma}}{\overset{\Sigma\otimes -}{\rightleftarrows}} \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))),$$

où l'adjoint à droite Oub^{Σ} oublie les actions des groupes symétriques. Cette adjonction est une équivalence de Quillen relativement aux structures $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables (voir [5, théorème 4.3.79]).

Corollaire 2.35. *Soit $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ un morphisme de T_{pt}-spectres symétriques de complexes de préfaisceaux sur* CpVar*. On suppose que* $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(f)$ *est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale stable de T_{pt}-spectres non symétriques. Alors, f est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale stable de T_{pt}-spectres symétriques.*

Démonstration. On ne restreint pas le généralité en supposant que f est une cofibration projective. Il suffit de montrer que le T_{pt}-spectre symétrique $\mathrm{coker}(f)$ est stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-équivalent au T_{pt}-spectre nul. On choisit une cofibration projective de T_{pt}-spectres symétriques $\mathrm{coker}(f) \to \mathbf{C}$ qui est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau et telle que $\mathbf{C}$ est projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau. On montrera que $\mathbf{C}$ est isomorphe au T_{pt}-spectre nul dans $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$.

Étant donné que $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable et que le foncteur Oub^{Σ} préserve les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau, le T_{pt}-spectre non symétrique $\mathbf{C}' = \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ est stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-équivalent au T_{pt}-spectre nul. En utilisant [5, théorème 4.3.61], on voit que l'équivalence de catégories $\mathbf{AnDA}(\Lambda) \simeq \mathbf{D}(\Lambda)$ envoie $\mathbf{C}'$ sur le complexe $\mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, \mathbf{C}'_n((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n})$. Ce complexe est donc acyclique. On en déduit aussitôt que le T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{C}$ satisfait aux conditions d'application du lemme 2.34. Il est donc isomorphe au T_{pt}-spectre nul dans $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$. □

La notion de $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectre symétrique (voir la définition ci-dessous) a été dégagée auparavant dans le contexte topologique (i.e., celui des S^1-spectres symétriques en ensembles simpliciaux) par Schwede [42, Theorem 4.44] qui lui donna le nom de « spectre symétrique semi-stable ». Cette notion a été ensuite transportée au contexte $\mathbb{A}^1$-homotopique dans le « Diplomarbeit » de Hähne [23] effectué sous la direction de Hornbostel.

Définition 2.36. Soit $\mathbf{E}$ un T_{pt}-spectre symétrique. On dit que $\mathbf{E}$ est un $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$*-spectre symétrique* (ou simplement un $\mathbf{\Lambda}$*-spectre symétrique*) lorsque la condition suivante est satisfaite. Pour une (et donc toute) équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ telle que le T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{F}$ est un Ω-spectre [7)], le morphisme $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{E}) \to \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{F})$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable dans $\mathbf{Spt}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$.

Étant donné un T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{E}$, on note, comme dans la preuve du lemme 2.34, $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})$ la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{E}}} \mathbf{\Lambda}^1(\mathbf{E}) \xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^1(\lambda_{\mathbf{E}})} \mathbf{\Lambda}^2(\mathbf{E}) \to \cdots \to \mathbf{\Lambda}^r(\mathbf{E}) \xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^r(\lambda_{\mathbf{E}})} \mathbf{\Lambda}^{r+1}(\mathbf{E}) \to \cdots, \tag{40}$$

[7)] Rappelons que cela veut dire que les morphismes $\gamma'_{\mathbf{F}} : \mathbf{F}_n \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{F}_{n+1})$ sont inversibles dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici, le foncteur dérivé à droite de $\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), -)$ est pris relativement à la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$.

et $\lambda_{\mathbf{E}}^{\infty} : \mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})$ le morphisme évident. Les $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectres symétriques seront privilégiés dans la suite parce qu'ils satisfont à une variante symétrique de [5, théorème 4.3.61]. C'est la suivante.

Théorème 2.37. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_{pt}*-spectre symétrique projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrant niveau par niveau. On suppose que* $\mathbf{E}$ *est un* $\mathbf{\Lambda}$*-spectre symétrique. Alors, le morphisme* $\mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})$ *est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale stable et* $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})$ *est un* Ω*-spectre qui est* $\mathbb{D}^1$*-local niveau par niveau.*

On établit d'abord un résultat préliminaire mais utile indépendamment du théorème à démontrer.

Proposition 2.38. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_{pt}*-spectre symétrique projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrant niveau par niveau. On suppose que* $\mathbf{E}$ *est un* $\mathbf{\Lambda}$*-spectre symétrique. Alors, le morphisme* $\lambda_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^1(\mathbf{E}) = \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E})$ *est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale stable. De plus, les* T_{pt}*-spectres* $\mathrm{s}_{-}\,\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{\Lambda}^1(\mathbf{E})$ *sont également des* $\mathbf{\Lambda}$*-spectres symétriques, projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrants niveau par niveau.*

Démonstration. On divise la preuve en trois étapes. Dans les deux premières on établit que $\lambda_{\mathbf{E}}$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable.

Étape A. Soit $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable de but un T_{pt}-spectre symétrique stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. Clairement, $\lambda_{\mathbf{F}}$ est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux niveau par niveau. Il suffira donc de montrer que $\mathbf{\Lambda}^1(f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. Par le corollaire 2.35, il suffit de montrer que $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{\Lambda}^1(f))$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable de T_{pt}-spectres non symétriques. Ce morphisme se réécrit : [8)]

$$f : \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}') \to \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{F}')$$

avec $\mathbf{E}' = \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{E})$ et $\mathbf{F}' = \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{F})$. Étant donné que $\mathbf{E}$ est un $\mathbf{\Lambda}$-spectre symétrique, le morphisme $f' : \mathbf{E}' \to \mathbf{F}'$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable entre T_{pt}-spectres non symétriques qui sont $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrants niveau par niveau. Il suffit alors de montrer que les endofoncteurs $\mathsf{R}\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), -)$ et $\mathsf{R}\,\mathrm{s}_{-}$ de la catégorie homotopique

$$\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1-\mathrm{usu}-\mathrm{niv}}(\mathbf{Spt}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))),$$

associée à la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau, préservent les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables. Ceci fera l'objet de l'étape suivante.

[8)] Il s'agit ici du prolongement du foncteur $\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), -)$ à la catégorie des T_{pt}-spectres non symétriques associé à la transformation naturelle

$$\tau' : (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), -) \to \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes -)$$

obtenue par adjonction de la transformation naturelle

$$\tau : (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes ((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes -) \simeq (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes ((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes -)$$

consistant à permuter les deux premiers facteurs. Ce n'est pas le seul prolongement possible. En effet, on aurait pu prendre à la place de τ' la transformation naturelle déduite par adjonction de l'identité du foncteur $(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes ((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes -)$.

Étape B. Étant donné que $T_{\mathrm{pt}} \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$, on a un isomorphisme $\mathsf{R}\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}},\infty),-) \simeq (-)[-2]$ entre endofoncteurs de $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$. La propriété recherchée est donc claire pour l'endofoncteur $\mathsf{R}\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}},\infty),-)$. D'autre part, s_- admet un adjoint à gauche s_+. Sur les T_{pt}-spectres non symétriques, le foncteur s_+ consiste à décaler les niveaux dans le sens opposé à celui de s_- et à placer le complexe nul au niveau zéro. En particulier, il préserve et détecte les équivalences $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales niveau par niveau. D'autre part, s_+ est une équivalence de Quillen à gauche relativement à la structure $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale stable (voir [5, théorème 4.3.38]). On déduit aussitôt que s_+ préserve et détecte les équivalences $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales stables. Soit maintenant $a:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ une équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale stable de T_{pt}-spectres non symétriques. Pour montrer que $\mathrm{s}_-(a)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale stable, il suffit de montrer que $\mathrm{s}_+\,\mathrm{s}_-(a)$ en est une. Or, les morphismes $\delta:\mathrm{s}_+\,\mathrm{s}_-(A)\to A$ et $\delta:\mathrm{s}_+\,\mathrm{s}_-(B)\to B$ sont des isomorphismes à partir du niveau 1. En particulier, ce sont des équivalences $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales stables (voir [5, lemme 4.3.59]). La propriété recherchée pour l'endofoncteur s_- découle maintenant de la propriété 2 de 3 des équivalences $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales stables. La première partie de la proposition est démontrée.

Étape C. Clairement, $\mathrm{s}_-\,\mathbf{E}$ et $\mathbf{\Lambda}^1(\mathbf{E})$ sont projectivement $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-fibrants niveau par niveau. Il reste à voir qu'ils sont des $\mathbf{\Lambda}$-spectres symétriques. Il est facile de voir que le foncteur $\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}},\infty),-)$ préserve les $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectres symétriques qui sont projectivement $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-fibrants niveau par niveau. On peut donc se concentrer sur le foncteur s_-. Pour cela, on reprend l'équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale $f:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ considérée dans l'étape A. Par l'étape B, $\mathrm{s}_-\,\mathrm{Oub}^{\Sigma}(f) = \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathrm{s}_-\,f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale de T_{pt}-spectres non symétriques. Le corollaire 2.35 entraîne alors que $\mathrm{s}_-\,f:\mathrm{s}_-\,\mathbf{E}\to\mathrm{s}_-\,\mathbf{F}$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale stable de T_{pt}-spectres symétriques. Or, $\mathrm{s}_-\,\mathbf{F}$ est stablement $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-fibrant. On voit que $\mathrm{s}_-\,\mathbf{E}$ est un $\mathbf{\Lambda}$-spectre symétrique en utilisant une deuxième fois que $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathrm{s}_-\,f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locale stable. □

Remarque 2.39. Si $\mathbf{E}$ un $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectre symétrique, il en est de même de $\mathrm{s}_-\,\mathbf{E}$. En effet, cette propriété est invariante par équivalences $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-locales niveau par niveau, et elle est vraie lorsque $\mathbf{E}$ est $(\mathbb{D}^1,\mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau par la proposition 2.38.

Le groupe symétrique Σ_n opère sur le foncteur $\mathrm{s}_-^n = (\mathrm{s}_-)^{\circ n}$. Étant donné un T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{E}$, l'action de Σ_n sur $(\mathrm{s}_-^n\,\mathbf{E})_m = \mathbf{E}_{m+n}$ est la restriction de l'action naturelle de Σ_{m+n} sur $\mathbf{E}_{m+n}$ suivant l'inclusion $\Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_{m+n}$ donnée par la composition de $\Sigma_n \simeq \{1\}\times\Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_m\times\Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_{m+n}$. Il est facile de voir que les deux transformations naturelles $\lambda_{\mathrm{s}_-^n\,\mathbf{E}}$, $\mathrm{s}_-^n(\lambda_{\mathbf{E}}):\mathrm{s}_-^n\,\mathbf{E}\to\mathrm{s}_-^{n+1}\,\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}},\infty),\mathbf{E})$ ne sont pas égales (dès que $n>0$). Toutefois, la différence est donnée par $\tau_{(n)} = (12\cdots n+1)\in\Sigma_{n+1}$ agissant sur s_-^{n+1}. On en déduit aussitôt le résultat suivant.

Lemme 2.40. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_{pt}*-spectre symétrique. Le triangle*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}^n(\mathbf{E}) \arrow[r, "\lambda_{\mathbf{\Lambda}^n(\mathbf{E})}"] \arrow[dr, "\mathbf{\Lambda}^n(\lambda_{\mathbf{E}})"'] & \mathbf{\Lambda}^{n+1}(\mathbf{E}) \\ & \mathbf{\Lambda}^{n+1}(\mathbf{E}) \arrow[u, "\tau_{(n)}"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif. Ci-dessus, la permutation $\tau_{(n)}$ *agit sur le facteur* s_-^{n+1} *de*

$$\mathbf{\Lambda}^{n+1} = \mathrm{s}_-^{n+1}\,\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}},\infty)^{\wedge n+1},-).$$

Démonstration du théorème 2.37. Par la proposition 2.38, les T_{pt}-spectres $\mathbf{\Lambda}^n(\mathbf{E})$ sont des $\mathbf{\Lambda}$-spectres symétriques. En utilisant la proposition 2.38 et le lemme 2.40, on obtient que tous les morphismes de (40) sont des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables. Par ailleurs, on peut facilement adapter la première partie de la preuve du lemme 2.24 pour obtenir que les $\mathbb{N}$-colimites préservent les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables. Ceci montre que $\lambda^{\infty}_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable.

Les T_{pt}-spectres $\mathbf{\Lambda}^n(\mathbf{E})$ sont $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrants niveau par niveau. Par le lemme 2.24, $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})$ est $\mathbb{D}^1$-local niveau par niveau. Il reste à voir que c'est un Ω-spectre.

Fixons une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ avec $\mathbf{F}$ un T_{pt}-spectre symétrique stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. Étant donné que $\lambda_{\mathbf{F}}$ est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau, il en est de même du morphisme $\lambda^{\infty}_{\mathbf{F}}$. En particulier, $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{F})$ est aussi stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. Il suffira donc de montrer que $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau. La source et le but de $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(f)$ étant $\mathbb{D}^1$-locaux niveau par niveau, on est ramené à montrer que le morphisme de complexes $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(f) : \mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_n(\mathrm{pt}) \to \mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{F})_n(\mathrm{pt})$ est un quasi-isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}} \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$, on a un isomorphisme de Λ-modules gradués

$$\mathrm{H}_*(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_n(\mathrm{pt})) \simeq \mathrm{H}_{2n+*}\big(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_n((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n})\big),$$

et de même pour $\mathbf{F}$. Il est donc équivalent de montrer que

$$\mathbf{\Lambda}^{\infty}(f) : \mathrm{H}_*\big(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_n((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n})\big) \to \mathrm{H}_*\big(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{F})_n((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n})\big) \tag{41}$$

est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le Λ-module gradué $\mathrm{H}_*(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_n((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n}))$ (et pareillement pour $\mathbf{F}$ à la place de $\mathbf{E}$) est la colimite du système inductif $(\mathrm{H}_*(\mathbf{E}_{n+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r})))_{r \in \mathbb{N}}$, où les morphismes de transitions sont donnés par les compositions de

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{n+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r})\big) &\xrightarrow{(*)} \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{n+r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r+1})\big)\\ &\xrightarrow{\tau^{-1}_{(n+r)}} \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{n+r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r+1})\big),\end{aligned}$$

avec $(*)$ égal à la composition de

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{n+r}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r})\big) &\xrightarrow{\gamma'_{\mathbf{E}}} \mathrm{H}_*\big(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}_{n+r+1})((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r})\big)\\ &= \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{n+r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \wedge (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r})\big)\\ &\xrightarrow{\tau} \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{n+r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge n+r} \wedge (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty))\big).\end{aligned} \tag{42}$$

En particulier, on voit que les morphismes (41) ne dépendent pas de n. Ainsi, on supposera dorénavant que $n = 0$. D'autre part, le morphisme τ dans (42) est l'identité. Pour voir cela, on utilise encore une fois l'isomorphisme $(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}} \simeq \Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$ (dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$) et le fait que les permutations des facteurs agissent trivialement sur les puissances tensorielles de $\Lambda_{\mathrm{cst}}[2]$. On voie en fin de compte que $\mathrm{H}_*(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_0(\mathrm{pt}))$ (et pareillement pour $\mathbf{F}$ à la place de $\mathbf{E}$) est la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$\cdots \to \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})\big) \xrightarrow{\tau^{-1}_{(r)} \circ \gamma'_{\mathbf{E}}} \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r+1})\big) \to \cdots.$$

Du fait que $\mathbf{F}$ est stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant, on a

$$\mathrm{H}_*(\mathbf{F}_0(\mathrm{pt})) \simeq \mathrm{H}_*\big(\mathbf{F}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})\big) \simeq \mathrm{H}_*(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{F})_0(\mathrm{pt}))$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$. Modulo ces identifications, le morphisme

$$\mathrm{H}_*(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{E})_0(\mathrm{pt})) \to \mathrm{H}_*(\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\mathbf{F})_0(\mathrm{pt}))$$

correspond (via la propriété universelle de la colimite) au morphisme induit par la famille suivante :

$$\big\{u_r : \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})\big) \xrightarrow{f} \mathrm{H}_*\big(\mathbf{F}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})\big) \simeq \mathrm{H}_*(\mathbf{F}_0(\mathrm{pt}))\big\}_{r \in \mathbb{N}}. \tag{43}$$

Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, le morphisme u_r ci-dessus est Σ_r-équivariant lorsqu'on fait opérer Σ_r trivialement sur le but et via son action sur $\mathbf{E}_r$ sur la source. Par le lemme 2.41 ci-dessous, on se ramène à montrer que la famille (43) induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}_*(\mathbf{F}_0(\mathrm{pt}))$ et la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$\cdots \to \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r})\big) \xrightarrow{\gamma'_{\mathbf{E}}} \mathrm{H}_*\big(\mathbf{E}_{r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r+1})\big) \to \cdots. \tag{44}$$

Or, par hypothèse, $\mathbf{E}$ est un $\mathbf{\Lambda}$-spectre symétrique. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Oub}^{\Sigma}(f) : \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{E}) \to \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{F})$$

est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-stable. Par le lemme 2.15, l'équivalence de catégories $\mathbf{AnDA}(\Lambda) \simeq \mathbf{D}(\Lambda)$ envoie un T_{pt}-spectre non symétrique $\mathbf{G}$, supposé $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau, sur la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$\cdots \to \mathbf{G}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r}) \xrightarrow{\gamma'_{\mathbf{G}}} \mathbf{G}_{r+1}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r+1}) \to \cdots.$$

On déduit de là que f induit un isomorphisme entre la colimite de la $\mathbb{N}$-suite (44) et la colimite de la $\mathbb{N}$-suite analogue, où $\mathbf{E}$ est remplacé par $\mathbf{F}$. En utilisant une deuxième fois les isomorphismes $\mathrm{H}_*(\mathbf{F}_0(\mathrm{pt})) \simeq \mathrm{H}_*(\mathbf{F}_r((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty)^{\wedge r}))$, on obtient que la famille (43) induit un isomorphisme entre la colimite de la $\mathbb{N}$-suite (44) et $\mathrm{H}_*(\mathbf{F}_0(\mathrm{pt}))$. □

Lemme 2.41. *On suppose données une $\mathbb{N}$-suite d'ensembles (de groupes, de Λ-modules, etc.)*

$$A_0 \xrightarrow{a_0} A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \to \cdots \to A_r \xrightarrow{a_r} A_{r+1} \to \cdots$$

et, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, une action de Σ_r sur A_r. On suppose également les deux propriétés suivantes :

(i) *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, le morphisme a_r est Σ_r-équivariant lorsqu'on fait agir Σ_r sur A_{r+1} par la restriction suivant l'inclusion $\Sigma_r \simeq \{1\} \times \Sigma_r \hookrightarrow \Sigma_{r+1}$.* [9)]

(ii) *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $A_r \to A_\infty = \mathrm{colim}_{s \in \mathbb{N}} A_s$ est Σ_r-équivariant lorsqu'on fait agir Σ_r trivialement sur A_∞.*

Alors pour tout choix d'une famille de permutations $(\sigma_r)_{r \in \mathbb{N}} \in \prod_{r \in \mathbb{N}} \Sigma_r$, la famille des morphismes canoniques $(A_r \to A_\infty)_{r \in \mathbb{N}}$ identifient A_∞ avec la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$A_0 \xrightarrow{\sigma_1 \circ a_0} A_1 \xrightarrow{\sigma_2 \circ a_1} A_2 \to \cdots \to A_r \xrightarrow{\sigma_{r+1} \circ a_r} A_{r+1} \to \cdots.$$

Démonstration. Il s'agit d'un exercice facile qu'on laissera au lecteur. □

9) Le choix de ces inclusions n'est pas important pour la validité du lemme.

2.2.3. Le foncteur de $\mathbb{D}^1$-localisation stable. Nous combinons ici les constructions des sections 2.2.1 et 2.2.2 pour obtenir un foncteur de $\mathbb{D}^1$-localisation stable pour les $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectres symétriques (voir la définition 2.36). Rappelons qu'une $\mathbb{D}^1$-localisation stable d'un T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{E}$ est un $\Omega_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectre symétrique $\mathbb{D}^1$-local niveau par niveau $\mathbf{F}$, muni d'une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Autrement dit, on cherche à construire explicitement (du moins pour les $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectres symétriques) le foncteur de localisation (au sens de [5, proposition 4.2.71]) inhérent à la localisation de Bousfield qui fournit la structure de modèles $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable à partir de la structure de modèles usu-locale niveau par niveau sur la catégorie $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$.

On commence d'abord par prolonger le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ (et ses avatars ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$) aux T_{pt}-spectres symétriques. Soit K un complexe de préfaisceaux sur CpVar. On dispose d'un isomorphisme naturel (en K) d'objets cubiques Σ-enrichis de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$:

$$\underline{\mathrm{hom}}\big(\bar{\mathbb{D}}, \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), K_\bullet)\big) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}, K_\bullet)\big).$$

En $\underline{\mathbf{1}}^n \in \boxplus$, ce morphisme est la composition de

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{hom}}\big(\bar{\mathbb{D}}^n, \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), K_\bullet)\big) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}} \times \bar{\mathbb{D}}^n, \{\infty\} \times \bar{\mathbb{D}}^n), K_\bullet\big)\\ &\underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^n \times \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \bar{\mathbb{D}}^n \times \{\infty\}), K_\bullet\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, K_\bullet)\big),\end{aligned}$$

avec τ l'isomorphisme induit par la permutation des facteurs. En passant aux complexes simples et ensuite aux complexes totaux, on obtient un isomorphisme de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}\big(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), -)\big) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(-)\big). \tag{45}$$

Par adjonction, on déduit une transformation naturelle

$$(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(-) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes -)$$

qui est symétrique au sens de [5, définition 4.3.16]. Elle permet donc de prolonger le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ à la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques. Étant donné un T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{E}$, $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})$ est donné au niveau n par le complexes $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}_n)$. Son morphisme d'assemblage au niveau n est l'adjoint du morphisme $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}_n) \to \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}_{n+1}))$ égal à la composition de

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}_n) \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{E}}} \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}\big(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}_{n+1})\big) \underset{\sim}{\xrightarrow{(45)}} \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}_{n+1})\big).$$

En remplaçant ci-dessus « complexe simple » par « complexe normalisé » et « complexe alterné » (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre), on obtient des transformations naturelles analogues pour les foncteurs ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ qui permettent de les prolonger à la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques. On a alors des morphismes de T_{pt}-spectres symétriques $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) \to {}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) \to {}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})$ qui sont des quasi-isomorphismes niveau par niveau.

De même, pour $m \in \mathbb{N}$, on peut prolonger le foncteur $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), -)$ à la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques. De plus, on déduit de (37) une transformation

$$t_m : \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})\big) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-m]^+$$

naturelle en $\mathbf{E} \in \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_{\mathrm{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))$. Les transformations naturelles analogues pour ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ s'étendent également à la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques.

Par le corollaire 2.26, le complexe $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(T_{\mathrm{pt}})$ est quasi-isomorphe à $\Lambda[2]$. On fixe un élément $\alpha \in T_{\mathrm{pt}}(\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2)$ dont la classe d'homologie $[\alpha]$ est une base du Λ-module $\mathrm{H}_2(\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\bullet}(T_{\mathrm{pt}}))$. La classe $[\alpha]$ est déterminée à multiplication près par un élément inversible de Λ. (En particulier, lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}$, la classe $[\alpha]$ est bien définie à un signe près.) La section α induit une transformation

$$\alpha^* : \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), K) \to \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), K),$$

naturelle en $K \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$, qui se prolonge à la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques.

Définition 2.42. Soit $\mathbf{E}$ un T_{pt}-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur CpVar.

(a) On note $\vartheta_{\mathbf{E}} : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) \to \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2]$ la transformation naturelle (en $\mathbf{E}$) donnée par la composition de

$$\begin{aligned}(46)\qquad \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) &\xrightarrow{\lambda} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})\big)\\ &\xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})\big) \xrightarrow{t_2} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2].\end{aligned}$$

(b) On note aussi $\varsigma_{\mathbf{E}} : \mathbf{\Lambda}^1(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) \to \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2]$ la transformation naturelle (en $\mathbf{E}$) donnée par la composition de

$$(47)\qquad \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})\big) \xrightarrow{\alpha^*} \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})\big) \xrightarrow{t_2} \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2],$$

à laquelle on applique le foncteur s_{-}.

Avec les notations de la définition 2.42, on a clairement $\vartheta_{\mathbf{E}} = \varsigma_{\mathbf{E}} \circ \lambda_{\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})}$.

Proposition 2.43. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_{pt}*-spectre symétrique. On suppose que* $\mathbf{E}$ *est un* $\mathbf{\Lambda}$*-spectre symétrique. Alors, le morphisme* $\vartheta_{\mathbf{E}}$ *de la définition* 2.42 *est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale stable. Si de plus on suppose que* $\mathbf{E}$ *est projectivement* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-fibrant niveau par niveau, le morphisme* $\varsigma_{\mathbf{E}}$ *de la définition* 2.42 *est une équivalence* $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$*-locale niveau par niveau.*

Démonstration. Soit $e : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau avec $\mathbf{F}$ un T_{pt}-spectre symétrique qui est injectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau. On a des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "e"'] & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[d, "e"] \\ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{F}) \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{F}}"] & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{F})[-2], \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}^1(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) \arrow[r, "\varsigma_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "e"'] & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[d, "e"] \\ \mathbf{\Lambda}^1(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{F})) \arrow[r, "\varsigma_{\mathbf{F}}"] & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{F})[-2], \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales niveau par niveau (voir le corollaire 2.27). On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $\mathbf{E}$ est injectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau. Nous allons montrer que le morphisme λ dans (46) est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable et que les morphismes α^* et t_2 dans (46) et (47) sont des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales niveau par niveau.

Par le lemme 2.28, le morphisme $\mathbf{E} \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})$ est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau. Il s'ensuit que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})$ est un $\mathbf{\Lambda}$-spectre symétrique qui de plus est projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau. La proposition 2.38 permet alors de conclure quant au morphisme λ dans (46). Par ailleurs, on a un carré commutatif de T_{pt}-spectres symétriques :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E})) & \xrightarrow{\alpha^*} & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), \mathbf{E})) \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) & \xrightarrow{\alpha^*} & \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})). \end{array}$$

En utilisant le corollaire 2.27, on se ramène à montrer que

$$\alpha^* : \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), \mathbf{E}) \to \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), \mathbf{E})$$

est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau. Ceci découle du lemme 2.44 ci-dessous. Enfin, étant donné que $\mathbf{E}$ est injectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau, on peut appliquer le lemme 2.33 pour obtenir que le morphisme t_2 dans (46) soit un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau. □

Lemme 2.44. *Soit K un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur* CpVar. *On suppose que K est injectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. Alors,*

$$\alpha^* : \underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty), K) \to \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2), K)$$

est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux.

Démonstration. Il s'agit de montrer que

$$\alpha^* : K(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}} \times X, \{\infty\} \times X) \to K(\bar{\mathbb{D}}^2 \times X, \partial\bar{\mathbb{D}}^2 \times X)$$

est un quasi-isomorphisme pour toute variété complexe X. En remplaçant K par $\underline{\mathrm{hom}}(X, K)$ (qui est encore injectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant), on se ramène au cas où $X = \mathrm{pt}$.

Soit $r_0 > 1$ un réel tel que $\alpha \in T_{\mathrm{pt}}(\bar{\mathbb{D}}^2, \partial\bar{\mathbb{D}}^2)$ se relève en $\alpha_0 \in T_{\mathrm{pt}}(\mathbb{D}(o, r_0)^2, \partial\mathbb{D}(o, r_0)^2)$. (Bien entendu, $\partial\mathbb{D}(o, r)^2$ est défini par l'équation $z_1z_2(z_1 - 1)(z_2 - 1) = 0$.) Pour $r \in]1, r_0]$, on notera α_r l'image de α_0 dans $\alpha_0 \in T_{\mathrm{pt}}(\mathbb{D}(o, r)^2, \partial\mathbb{D}(o, r)^2)$. Il suffit de vérifier que

$$\alpha_r^* : K(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \to K(\mathbb{D}(o, r)^2, \partial\mathbb{D}(o, r)^2)$$

est un quasi-isomorphisme pour $r \in]1, r_0]$. Sur les n-ièmes groupes d'homologie, ce morphisme s'écrit

$$\pi_0\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}[n], K\big) \xrightarrow{\alpha_r^*} \pi_0\big((\mathbb{D}(o, r)^2, \partial\mathbb{D}(o, r)^2) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}[n], K\big).$$

Étant donné que K est injectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant et que $(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}$ et $(\mathbb{D}(o, r)^2, \partial\mathbb{D}(o, r)^2) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}$ sont injectivement cofibrants, on se ramène à montrer que $\alpha_r : (\mathbb{D}(o, r)^2, \partial\mathbb{D}(o, r)^2) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}} \to (\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Ceci revient à dire que le morphisme de complexes de chaînes

$$\alpha_r : \mathrm{Sg}_{\bullet}^{\mathbb{D}}\big((\mathbb{D}(o, r)^2, \partial\mathbb{D}(o, r)^2) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}\big) \to \mathrm{Sg}_{\bullet}^{\mathbb{D}}\big((\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}, \infty) \otimes \Lambda_{\mathrm{cst}}\big) \tag{48}$$

est un quasi-isomorphisme. Or, les deux complexes dans (48) sont quasi-isomorphes à $\Lambda[2]$. Le résultat recherché découle du choix de α. □

On donne maintenant la construction de la $\mathbb{D}^1$-localisation stable des $\mathbf{\Lambda}_{T_{\mathrm{pt}}}$-spectres symétriques.

Définition 2.45. Soit $\mathbf{E}$ un T_{pt}-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur CpVar. On note $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$ la colimite de la $\mathbb{N}$-suite :

(49)
$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2] \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \cdots \to \mathrm{s}_{-}^{n}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2n] \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}_{-}^{n+1}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2n-2] \to \cdots .$$

On obtient ainsi un endofoncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}$ de la catégorie des T_{pt}-spectres symétriques muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}$.

Remarque 2.46. En remplaçant dans la définition 2.45 le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ par ${}^{\mathrm{n}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}$ (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre), on obtient deux endofoncteurs qu'on notera ${}^{\mathrm{n}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}$ et ${}^{\mathrm{a}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}$.

Lemme 2.47. *Le triangle de T_{pt}-spectres symétriques*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{s}_{-}^{n}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\vartheta_{\mathrm{s}_{-}^{n}\mathbf{E}}"] \arrow[dr, "\mathrm{s}_{-}^{n}\,\vartheta_{\mathbf{E}}"'] & \mathrm{s}_{-}^{n+1}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2] \\
& \mathrm{s}_{-}^{n+1}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[u, "\tau_{(n)}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ci-dessus, $\tau_{(n)}$ est la permutation cyclique $(12\cdots(n+1)) \in \Sigma_{n+1}$ opérant sur le foncteur s_{-}^{n+1}.

On arrive au résultat principal de cette section.

Théorème 2.48. *Soit $\mathbf{E}$ un T_{pt}-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur* CpVar. *On suppose que $\mathbf{E}$ est un $\mathbf{\Lambda}$-spectre symétrique. Alors, le morphisme canonique $\mathbf{E} \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$ est un Ω-spectre qui est $\mathbb{D}^1$-local niveau par niveau. Autrement dit, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}$ est un foncteur de $\mathbb{D}^1$-localisation stable pour les $\mathbf{\Lambda}$-spectres symétriques.*

Démonstration. Par la proposition 2.38 (et la remarque 2.39), les T_{pt}-spectres symétriques $\mathrm{s}_{-}^{n}\,\mathbf{E}$ sont des $\mathbf{\Lambda}$-spectres symétriques. La proposition 2.43 montre alors que les morphismes $\vartheta_{\mathrm{s}_{-}^{n}\mathbf{E}}$ sont des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables. En utilisant le lemme 2.47, on déduit aussitôt que tous les morphismes dans la $\mathbb{N}$-suite (49) sont des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables. Par ailleurs, on peut facilement adapter la première partie de la preuve du lemme 2.24 pour obtenir que les $\mathbb{N}$-colimites préservent les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales stables. Ceci montre que $\mathbf{E} \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. Le lemme 2.24 et le théorème 2.23 montrent également que le T_{pt}-spectre symétrique $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$ est $\mathbb{D}^1$-local niveau par niveau. Il reste à voir que c'est un Ω-spectre.

En utilisant le corollaire 2.27, on montre facilement que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}$ préserve les équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales niveau par niveau. Ainsi, pour montrer que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$ est un Ω-spectre, on peut supposer que $\mathbf{E}$ est projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant niveau par niveau. Par le lemme 2.28, il en est de même de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})$.

Pour $r \in \mathbb{N}$, on note $\varsigma_{\mathbf{E}}^{(r)} : \mathbf{\Lambda}^r(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) \to \mathrm{s}_{-}^{r}\ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2r]$ la composition de

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}^r(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) &\xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^{r-1}(\varsigma_{\mathbf{E}})} \mathrm{s}_{-}\ \mathbf{\Lambda}^{r-1}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}))[-2] \\ &\xrightarrow{\mathbf{\Lambda}^{r-2}(\varsigma_{\mathbf{E}})} \cdots \to \mathrm{s}_{-}^{r-1}\ \mathbf{\Lambda}^1(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}))[-2r+2] \xrightarrow{\varsigma_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}_{-}^{r}\ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2r].\end{aligned}$$

Par la proposition 2.43, les $\varsigma_{\mathbf{E}}^{(r)}$ sont des équivalences $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locales niveau par niveau. Par ailleurs, les carrés

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}^r(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}^r(\lambda)"] \arrow[d, "\varsigma_{\mathbf{E}}^{(r)}"] & \mathbf{\Lambda}^{r+1}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) \arrow[d, "\varsigma_{\mathbf{E}}^{(r+1)}"] \\ \mathrm{s}_{-}^{r}\ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2r] \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{E}}"] & \mathrm{s}_{-}^{r+1}\ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})[-2r-2] \end{tikzcd}$$

commutent par construction. En passant à la colimite suivant les $r \in \mathbb{N}$, la famille $(\varsigma_{\mathbf{E}}^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ fournit donc un morphisme $\varsigma_{\mathbf{E}}^{\infty} : \mathbf{\Lambda}^{\infty}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E})) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})$. Par le lemme 2.24, $\varsigma_{\mathbf{E}}^{\infty}$ est un équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau. Or, le théorème 2.37 affirme que $\mathbf{\Lambda}^{\infty}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}))$ est un Ω-spectre. □

2.2.4. Approximation du complexe des chaînes singulières des motifs. Comme avant, k désigne un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. On note $\overline{\mathsf{Sm}}/k$ la catégorie des pro-k-schémas lisses, i.e., des pro-objets de Sm/k. Si F est un préfaisceau sur Sm/k (à valeurs dans une catégorie qui possède les colimites filtrantes), on l'étend à $\overline{\mathsf{Sm}}/k$ en posant $F((X_i)_{i\in I}) = \mathrm{colim}_{i\in I}\ F(X_i)$ pour tout pro-k-schéma lisse $(X_i)_{i\in I}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}_k^n)$ la catégorie ayant pour objets les couples (U, u) avec U un $\mathbb{A}_k^n$-schéma lisse et $u : \bar{\mathbb{D}}^n \to U^{\mathrm{an}}$ un morphisme de pro-variétés complexes tel que la composition $\bar{\mathbb{D}}^n \xrightarrow{u} U^{\mathrm{an}} \to (\mathbb{A}_k^n)^{\mathrm{an}}$ coïncide avec l'inclusion canonique $\bar{\mathbb{D}}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Une flèche $f : (U, u) \to (V, v)$ dans $\mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}_k^n)$ est un morphisme de $\mathbb{A}_k^n$-schémas $f : U \to V$ tel que $v = f^{\mathrm{an}} \circ u$. On pensera à la catégorie $\mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}_k^n)$ comme étant la catégorie des voisinages lisses du polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$ dans l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$. Cette catégorie intervient dans la description des sections sur $\bar{\mathbb{D}}^n$ de l'image inverse d'un préfaisceau suivant le foncteur $An : \mathsf{Sm}/k \to \mathsf{CpVar}$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Lemme 2.49. *Soit F un préfaisceau sur Sm/k à valeurs dans une catégorie possédant les petites colimites. On a un isomorphisme canonique :*

$$An^*(F)(\bar{\mathbb{D}}^n) \simeq \operatorname*{colim}_{(U,u)\in\mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}_k^n)} F(U).$$

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} An^*(F)(\bar{\mathbb{D}}^n) &= \operatorname*{colim}_{r\in\mathbb{R},\, r>1} An^*(F)(\mathbb{D}(o,r)^n) \\ &= \operatorname*{colim}_{r\in\mathbb{R},\, r>1} \Big(\operatorname*{colim}_{(U,u)\in\mathbb{D}(o,r)^n\backslash(\mathsf{Sm}/k)} F(U)\Big) \simeq \operatorname*{colim}_{(U,u)\in\bar{\mathbb{D}}^n\backslash(\mathsf{Sm}/k)} F(U). \end{aligned}$$

Ci-dessus, $\mathbb{D}(o,r)^n\backslash(\mathsf{Sm}/k)$ (resp. $\bar{\mathbb{D}}^n\backslash(\mathsf{Sm}/k)$) désigne la catégorie des couples (U, u) formés d'un k-schéma lisse U et d'un morphisme de variétés analytiques $u : \mathbb{D}(o,r)^n \to U^{\mathrm{an}}$

(resp. de pro-variétés analytiques $u : \bar{\mathbb{D}}^n \to U^{\mathrm{an}}$). Il reste à vérifier que le foncteur évident $E : \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \to \bar{\mathbb{D}}^n\backslash(\mathsf{Sm}/k)$ est cofinal. Cette vérification est omise. □

On note $\mathcal{A}_n = \Gamma(\bar{\mathbb{D}}^n, \mathcal{O})$ l'anneau des fonctions analytiques complexes définies sur un voisinage ouvert du polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$. C'est l'anneau des séries formelles

$$f = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} t_1^{\nu_1}\cdots t_n^{\nu_n}$$

pour lesquelles il existe un réel $r > 1$ et une constante $C > 0$ tels que $|a_{\nu_1,\ldots,\nu_n}| \leq C\cdot r^{-\sum_{i=1}^n \nu_i}$ pour tout $(\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{N}^n$. On aura besoin du résultat suivant.

Proposition 2.50. *La $k[t_1,\ldots,t_n]$-algèbre $\mathcal{A}_n$ est noethérienne et régulière.*

Démonstration. Il est classique que l'anneau $\mathcal{A}_n$ est noethérien. On renvoie le lecteur à [16, théorème I.9], où il est prouvé que les fonctions analytiques, définies au voisinage d'une partie C d'un espace analytique complexe X, forment un anneau noethérien, et ceci pour une large classe de parties compactes $C \subset X$.

Il reste à voir que $\mathcal{A}_n$ est régulière en tant que $k[t_1,\ldots,t_n]$-algèbre. Pour cela, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$. Il est bien connu que l'anneau $\mathcal{A}_n$ est factoriel et donc à fortiori régulier. On renvoie le lecteur à [12], où il trouvera un critère de factorialité qui s'applique à des anneaux de fonctions analytiques beaucoup plus généraux que les anneaux $\mathcal{A}_n$. Par [31, Theorem 102], on déduit que $\mathcal{A}_n$ est excellent. Ainsi, pour montrer que la $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]$-algèbre $\mathcal{A}_n$ est régulière, il suffit de vérifier que $\mathcal{A}_n /\!\!/ \mathfrak{p}$ est une $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]/\!\!/\mathfrak{q}$-algèbre régulière pour tout idéal maximal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{A}_n$ d'image inverse $\mathfrak{q} \subset \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]$. (Étant donné un idéal I d'un anneau commutatif R, $R/\!\!/I$ désigne la completion formelle de R suivant I, i.e., l'anneau $\lim_{n\in\mathbb{N}} R/I^n$.) Or, tout idéal maximal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{A}_n$ est de la forme $(t_1 - a_1,\ldots,t_n - a_n)$ avec a_i des nombres complexes de modules inférieurs ou égales à 1. On a donc

$$\mathcal{A}_n/\!\!/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]/\!\!/\mathfrak{q} \simeq \mathbb{C}[[t_1 - a_1,\ldots,t_n - a_n]].$$ □

Par le théorème de Popescu [37, 38] et sa variante plus précise [44, Theorem 10.1], on déduit la conséquence suivante.

Corollaire 2.51. *$\mathcal{A}_n$ est l'union filtrante de ses sous-$k[t_1,\ldots,t_n]$-algèbres lisses de type fini.*

Notons $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \subset \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ la sous-catégorie pleine formée des couples $(U,u) \in \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ tels que U est un k-schéma affine, lisse sur $\mathbb{A}^n_k$, et le morphisme $u^* : \mathcal{O}_U(U) \to \mathcal{A}_n$, induit par u, est injectif. Il est clair que la catégorie $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est équivalente à l'ensemble des sous-$k[t_1,\ldots,t_n]$-algèbres lisses de $\mathcal{A}_n$ qu'on ordonne par l'opposée de la relation d'inclusion. En particulier, le corollaire 2.51 entraîne que la catégorie $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofiltrante.

Proposition 2.52. *L'inclusion $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \hookrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofinale. En particulier, la catégorie $\mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofiltrante.*

Démonstration. On vient de voir que la catégorie $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est équivalente à un ensemble ordonné cofiltrant. Pour vérifier que $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \hookrightarrow \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofinale, il suffit donc de montrer que tout objet de $\mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est le but d'une flèche dont la source est dans $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$.

Fixons un objet $(U, u) \in \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. Par l'astuce de Jouanolou [25, lemme 1.5], il existe un torseur $T \to U$ sous un fibré vectoriel $V \to U$ tel que T est un k-schéma affine. Étant donné que les polydisques ouverts sont des variétés de Stein, on déduit aussitôt que le $(\bar{\mathbb{D}}^n \times_{U^{\mathrm{an}},u} V^{\mathrm{an}})$-torseur $\bar{\mathbb{D}}^n \times_{U^{\mathrm{an}},u} T^{\mathrm{an}}$ est trivial, i.e., il admet une section. Autrement dit, il existe un morphisme de pro-variétés complexes $t : \bar{\mathbb{D}}^n \to T^{\mathrm{an}}$ qui relève le morphisme u. Le morphisme t équivaut à la donnée d'un morphisme de $k[t_1, \ldots, t_n]$-algèbres $t^* : \mathcal{O}_T(T) \to \mathcal{A}_n$. L'algèbre $\mathcal{O}_T(T)$ étant de type fini, il existe par le corollaire 2.51 une sous-$k[t_1, \ldots, t_n]$-algèbre lisse $B \subset \mathcal{A}_n$ qui contient l'image de t^*. Notons $b : \bar{\mathbb{D}}^n \to \mathrm{Spec}(B)^{\mathrm{an}}$ le morphisme évident. Alors, l'objet $(\mathrm{Spec}(B), b) \in \mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ domine (U, u). □

Par la proposition 2.52, le foncteur d'oubli $\bar{\mathbb{D}}^n_{\mathrm{li}} : \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \to \mathsf{Sm}/k$, qui à un couple (U, u) associe U, définit un pro-k-schéma lisse $\bar{\mathbb{D}}^n_{\mathrm{li}}$. Il est immédiat de voir que la famille $\{\bar{\mathbb{D}}^n_{\mathrm{li}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ s'étend d'une manière naturelle en un pro-k-schéma cocubique Σ-enrichi $\bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}} = \bar{\mathbb{D}}^\bullet_{\mathrm{li}}$, i.e., un objet cocubique Σ-enrichi (au sens de la définition A.12) dans la catégorie $\overline{\mathsf{Sm}/k}$. De plus, les morphismes évidents $\bar{\mathbb{D}}^n_{\mathrm{li}} \to \mathbb{A}^n_k$ définissent un morphisme de pro-k-schémas cocubiques Σ-enrichis.

Définition 2.53. Soit $K = K_\bullet$ un complexe de préfaisceaux de Λ-modules sur Sm/k. On note $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K)$ le complexe total associé au complexe double $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}, K_\bullet))$. On pose $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K) = \Gamma(\mathrm{Spec}(k), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K))$.

Remarque 2.54. En utilisant dans la définition 2.53 le « complexe normalisé » $\mathrm{N}(-)$ et le « complexe alterné » $\mathrm{A}(-)$ (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre) au lieu de $\mathrm{C}(-)$, on obtient des complexes qu'on notera ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K)$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K)$. Ces complexes sont naturellement quasi-isomorphes à $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K)$.

Lemme 2.55. *Soit K un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k. *On a un isomorphisme canonique* $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(An^*(K))$.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du lemme 2.49. □

Remarque 2.56. Le lecteur prendra garde que les complexes $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K)$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(An^*(K))$ ne vivent pas dans la même catégorie. En effet, le premier est un complexe de préfaisceaux sur Sm/k alors que le second est un complexe de préfaisceaux sur CpVar. Le lemme 2.55 affirme simplement qu'ils ont les mêmes sections globales.

Remarque 2.57. Le lemme 2.55, entraîne que

$$An^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda))$$

envoie une équivalence $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale sur une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Expliquons comment faire. Puisque An^* est un foncteur de Quillen à gauche, il suffit de montrer que si f est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux sur Sm/k, alors $An^*(f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale. Puisque les colimites filtrantes sont exactes, le morphisme $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(f)$ est encore un quasi-isomorphisme. Le lemme 2.55 entraîne alors que le morphisme $An^*(f)$ induit un quasi-isomorphisme après application de $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}$. On utilise le corollaire 2.26 pour conclure. Le même argument montre que le foncteur An^*, étendu aux spectres symétriques, envoie également une équivalence $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale stable sur une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \subset \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ la sous-catégorie pleine ayant pour objets les couples (U, u) avec U un $\mathbb{A}^n_k$-schéma étale. Les objets de la catégorie $\mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ sont les voisinages étales du polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$ dans l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$. On note aussi $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) = \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \cap \mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ formée des couples (U, u) tels que U est affine et le morphisme $u^* : \mathcal{O}_U(U) \to \mathcal{A}_n$ est injectif. Puisque U est étale sur $\mathbb{A}^n_k$, cette dernière condition équivaut à la connexité du k-schéma U. On a l'analogue suivant de la proposition 2.52 dont la preuve est toutefois beaucoup plus élémentaire puisqu'elle ne fait pas appel au théorème de Popescu.

Proposition 2.58. *L'inclusion $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \hookrightarrow \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofinale et la catégorie $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est équivalente à un ensemble ordonné cofiltrant. En particulier, la catégorie $\mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofiltrante.*

Démonstration. Puisque la catégorie $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est contenue dans $\mathcal{V}'_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$, elle est équivalente à un ensemble ordonné. Soient (U_1, u_1) et (U_2, u_2) deux objets de $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. Alors $U = U_1 \times_{\mathbb{A}^n_k} U_2$ est un $\mathbb{A}^n_k$-schéma étale et affine. De plus, on dispose d'un morphisme $u = (u_1, u_2) : \bar{\mathbb{D}}^n \to U^{\mathrm{an}}$ qui fait de U un voisinage étale de $\bar{\mathbb{D}}^n$ dans $\mathbb{A}^n_k$. Notons U' l'unique composante connexe de U telle que U'^{an} contient l'image de u et notons $u' : \bar{\mathbb{D}}^n \to U'^{\mathrm{an}}$ le morphisme induit par u. Alors, (U', u') est un objet de $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ qui domine (U_1, u_1) et (U_2, u_2).

Il reste à voir que l'inclusion $\mathcal{V}'_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \hookrightarrow \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ est cofinale. On fixe une extension finie $k \hookrightarrow l \subset \mathbb{C}$ de k qui soit dense dans $\mathbb{C}$. On peut prendre $l = \sigma(k)$ ou $l = \sigma(k)[\sqrt{-1}]$ selon que $\sigma(k)$ est dense ou pas dans $\mathbb{C}$. Soit (U, u) un objet $\mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. Quitte à remplacer U par $U \otimes_k l$, on peut supposer que l'image de $\mathcal{O}_U(U)$ dans $\mathcal{A}_n$ contient l. Quitte à remplacer U par la composante connexe dont l'analytifiée contient l'image de u, on peut supposer que U est connexe. On montera qu'il existe un ouvert affine $U' \subset U$ tel que U'^{an} contient l'image de u.

Soit $\bar{U}$ le normalisé de $\mathbb{A}^n_k$ dans U. C'est un $\mathbb{A}^n_k$-schéma fini (et en particulier affine) dans lequel U se plonge comme un ouvert dense. On note $Z = \bar{U} - U$ le complémentaire de U. Le morphisme u induit un morphisme de pro-espaces analytiques $\bar{u} : \bar{\mathbb{D}}^n \to \bar{U}^{\mathrm{an}}$. On pose $B = \mathcal{O}_{\bar{U}}(\bar{U})$. C'est une $k[t_1, \ldots, t_n]$-algèbre finie qu'on peut identifier à son image par $\bar{u}^*$. Clairement, $B \subset \mathcal{A}_n$ contient le sous-anneau $l[t_1, \ldots, t_n] \subset \mathcal{A}_n$.

Soit $I = (b_1, \ldots, b_r)$ un ideal de définition de Z. Puisque l'image de $\bar{u}$ ne rencontre pas Z^{an}, on a $I \cdot \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$. Il existe donc des séries $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{A}_n$ telles que $\sum_{i=1}^r b_i f_i = 1$. On fixe un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\|b_i\|_\infty \leq (2r\varepsilon)^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Ici, $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur le polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$. Puisque l est dense dans $\mathbb{C}$, l'anneau $l[t_1, \ldots, t_n]$ est dense dans $\mathcal{A}_n$ pour la norme infinie. On peut donc trouver des polynômes $P_1, \ldots, P_r \in l[t_1, \ldots, t_n]$ tels que $\|f_i - P_i\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq r$. On pose $g = \sum_{i=1}^r b_i P_i$. C'est un élément de l'idéal I et par construction, on a $\|g - 1\|_\infty \leq 2^{-1}$. En particulier, g

est inversible sur $\bar{\mathbb{D}}^n$. L'image de $\bar{\mathbb{D}}^n$ dans $\bar{U}^{\mathrm{an}}$ est contenue donc dans $(\bar{U}[1/g])^{\mathrm{an}}$. De plus, $U' = \bar{U}[1/g]$ est un ouvert affine de $\bar{U}$ qui est contenu dans U. □

Par la proposition 2.58, le foncteur d'oubli $\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}} : \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \to \mathsf{Sm}/k$ qui à un couple (U, u) associe le k-schéma lisse U définit un pro-k-schéma lisse $\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$. Il est immédiat de voir que la famille $\{\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ s'étend d'une manière naturelle en un pro-k-schéma cocubique Σ-enrichi $\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} = \bar{\mathbb{D}}^{\bullet}_{\text{ét}}$. On a des morphismes évidents $\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}} \to \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et $\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \to \mathbb{A}_k$.

Définition 2.59. Soit $K = K_\bullet$ un complexe de préfaisceaux sur Sm/k. On note $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$ le complexe total associé au complexe double $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K_\bullet))$. On pose

$$\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) = \Gamma(\mathrm{Spec}(k), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)).$$

Remarque 2.60. En utilisant dans la définition 2.59 le « complexe normalisé » $\mathrm{N}(-)$ et le « complexe alterné » $\mathrm{A}(-)$ (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre) au lieu de $\mathrm{C}(-)$, on obtient des complexes qu'on notera ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$. Ces complexes sont naturellement quasi-isomorphes à $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$.

Le morphisme de pro-k-schémas cocubiques Σ-enrichis $\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}} \to \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ induit une transformation

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K) \tag{50}$$

naturelle en $K \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))$. Le théorème suivant, jouera un rôle important dans la suite. Il s'agit d'un résultat d'approximation des chaînes singulières (à valeurs dans un motif) par des chaînes singulières « algébriques ».

Théorème 2.61. *Le morphisme* (50) *est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux sur* Sm/k.

Démonstration. Pour tout k-schéma lisse X, on a des isomorphismes canoniques $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K)(X) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(\underline{\mathrm{hom}}(X, K))$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)(X) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{hom}}(X, K))$. Quitte à remplacer K par $\underline{\mathrm{hom}}(X, K)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \to \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K)$ est un quasi-isomorphisme. Dans la suite, on supposera aussi que $\sigma(k)$ est dense dans $\mathbb{C}$. Ceci ne restreint pas la généralité. En effet, étant donnée une extension finie $l \subset \mathbb{C}$ contenant $\sigma(k)$, on a alors des isomorphismes canoniques $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K \circ c_{l/k})$ et $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K \circ c_{l/k})$ avec $c_{l/k} : \mathsf{Sm}/l \to \mathsf{Sm}/k$ le foncteur qui associe à $X \in \mathsf{Sm}/l$ le schéma X vu comme k-schéma.

Pour la suite, il sera plus commode de travailler avec ${}^{\mathrm{ng}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$ et ${}^{\mathrm{ng}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K)$, les complexes totaux associés à ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}(K(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ et ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}(K(\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}}))$ respectivement. Bien entendu, ceci ne change strictement rien au contenu du théorème. En écrivant $K = \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, \sigma_{\leq n}\tau_{\geq -n}K$ (avec $\sigma_{\leq n}$ la troncation bête et $\tau_{\geq -n}$ la troncation canonique), on se ramène au cas où K est borné. Par une récurrence facile sur la longueur de K, on se ramène même au cas où $K = F[0]$ avec F un préfaisceau de Λ-modules sur Sm/k. Il s'agit alors de montrer que ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})) \to {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}}))$ est un quasi-isomorphisme. On divise la preuve de cela en deux parties. Dans la première, on montre que ce morphisme induit des épimorphismes sur l'homologie. Dans la seconde, on montre qu'il induit des monomorphismes sur l'homologie.

Partie 1 : Surjectivité. On fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et une classe d'homologie $[\gamma] \in \mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}})))$ représentée par une section $\gamma \in F(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{li}})$ telle que $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\gamma) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\epsilon \in \{0,1\}$. On peut trouver $(U,u) \in \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ et une section $\gamma_U \in F(U)$ qui relève γ. Quitte à raffiner (U,u), on peut supposer que U est affine et que l'image de γ_U dans $F(U/(t_i-\epsilon))$ est nulle pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\epsilon \in \{0,1\}$. Par le lemme 2.62 ci-dessous et quitte à raffiner une nouvelle fois $(U,u) \in \mathcal{V}_{\mathrm{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale de $\mathbb{A}^n_k$-schémas $e : U \to \mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k$. Considérons le morphisme $v = e^{\mathrm{an}} \circ u : \bar{\mathbb{D}}^n \to (\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k)^{\mathrm{an}}$. C'est un morphisme de $(\mathbb{A}^n_k)^{\mathrm{an}}$-variétés analytiques. Il s'écrit donc $v(t_1,\dots,t_n) = (t_1,\dots,t_n,v_1,\dots,v_r)$ avec $v_i = v_i(t_1,\dots,t_n) \in \mathcal{A}_n$ pour $1 \leq i \leq r$. En particulier, v est une pro-immersion localement fermée. Puisque e^{an} est étale, il existe un voisinage tubulaire $T \subset (\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k)^{\mathrm{an}}$ de $v(\bar{\mathbb{D}}^n)$ tel que la composante connexe de $(e^{\mathrm{an}})^{-1}(T)$ contenant $u(\bar{\mathbb{D}}^n)$ s'envoie isomorphiquement sur T par e^{an}. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'image du morphisme $v_\varepsilon : \bar{\mathbb{D}}^n \times \bar{\mathbb{D}}^r \to (\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k)^{\mathrm{an}}$, défini par $v_\varepsilon(t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_r) = (t_1,\dots,t_n,v_1+\varepsilon\cdot s_1,\dots,v_r+\varepsilon\cdot s_r)$, est contenue dans T. Il existe alors un unique morphisme $u_\varepsilon : \bar{\mathbb{D}}^n \times \bar{\mathbb{D}}^r \to U^{\mathrm{an}}$ rendant commutatif le diagramme de pro-variétés complexes suivant :

(51)
$$\begin{tikzcd} \bar{\mathbb{D}}^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "{(\mathrm{id},0)}"'] & U^{\mathrm{an}} \arrow[d, "e^{\mathrm{an}}"] \\ \bar{\mathbb{D}}^n \times \bar{\mathbb{D}}^r \arrow[ur, "u_\varepsilon"] \arrow[r, "v_\varepsilon"'] & (\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k)^{\mathrm{an}}. \end{tikzcd}$$

Rappelons que nous avions supposé que k, que l'on identifie à un sous-corps de $\mathbb{C}$ via le plongement σ, est dense dans $\mathbb{C}$. On peut donc trouver des polynômes $v'_i \in k[t_1,\dots,t_n]$ tels que $\|v'_i - v_i\|_\infty \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur le polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$. Appelons $b : \bar{\mathbb{D}}^n \to \bar{\mathbb{D}}^n \times \bar{\mathbb{D}}^r$ la section à la projection sur le premier facteur définie par

$$b(t_1,\dots,t_n) = \big(t_1,\dots,t_n,\varepsilon^{-1}\cdot(v'_1-v_1),\dots,\varepsilon^{-1}\cdot(v'_r-v_r)\big).$$

La composée $v' = v_\varepsilon \circ b : \bar{\mathbb{D}}^n \to (\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k)^{\mathrm{an}}$ est alors donnée par

$$v'(t_1,\dots,t_n) = (t_1,\dots,t_n,v'_1,\dots,v'_r).$$

En particulier v' est la composition de l'inclusion évidente $\bar{\mathbb{D}}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n = (\mathbb{A}^n_k)^{\mathrm{an}}$ avec l'analytifié du morphisme de k-schémas $d : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k$ donné par

$$d(t_1,\dots,t_n) = (t_1,\dots,t_n,v'_1,\dots,v'_r).$$

Formons le carré cartésien de k-schémas lisses

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "d"] \arrow[d, "e"'] & U \arrow[d, "e"] \\ \mathbb{A}^n_k \arrow[r, "d"] & \mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^r_k. \end{tikzcd}$$

On déduit de (51) qu'il existe un unique morphisme de pro-variétés complexes $w : \bar{\mathbb{D}}^n \to W^{\mathrm{an}}$ tel que le morphisme $u' = u_\varepsilon \circ b$ soit égal à $d^{\mathrm{an}} \circ w$.

Rappelons qu'on cherche un antécédent à $[\gamma]$ par le morphisme

(52)
$$\mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{ét}}))) \to \mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}))).$$

Puisque W est étale sur $\mathbb{A}^n_k$, la construction précédente fournit un objet $(W,w) \in \mathcal{V}_{\mathrm{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. Notons $\gamma'_W \in F(W)$ la restriction de γ_U suivant le morphisme $d : W \to U$. On a clairement

$(\gamma'_W)_{|W/(t_i-\epsilon)} = 0$ pour tout $(i,\epsilon) \in [\![1,n]\!]\times\{0,1\}$. La section $\gamma'_W \in F(W)$ définit donc un élément $\gamma' \in F(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}})$ qui est dans le noyau de tous les morphismes $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}$ pour $(i,\epsilon) \in [\![1,n]\!]\times\{0,1\}$. D'où une classe d'homologie $[\gamma'] \in \mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})))$. Pour conclure, il reste à montrer que $[\gamma]$ coïncide avec l'image de $[\gamma']$ par (52). Par le lemme 2.55, il suffit de montrer que les images de $[\gamma]$ et $[\gamma']$ dans $\mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(An^*(F)(\bar{\mathbb{D}})))$ sont égales. Ces images sont représentées par les cycles

$$\alpha = [(\gamma \in F(U),\, u : \bar{\mathbb{D}}^n \to U^{\mathrm{an}})] \quad \text{et} \quad \alpha' = [(\gamma' \in F(W),\, w : \bar{\mathbb{D}}^n \to W^{\mathrm{an}})]$$

dans $An^*(F)(\bar{\mathbb{D}}^n) = \operatorname{colim}_{X \in \bar{\mathbb{D}}^n\backslash(\mathsf{Sm}/k)} F(X)$. Soit $h : \bar{\mathbb{D}}^{n+1} \to \bar{\mathbb{D}}^n \times \bar{\mathbb{D}}^r$ le morphisme donné par

$$h(t_1,\ldots,t_{n+1}) = \big(t_2,\ldots,t_{n+1}, t_1\cdot b_1(t_2,\ldots,t_{n+1}),\ldots,t_1\cdot b_r(t_2,\ldots,t_{n+1})\big)$$

avec $b_i = \varepsilon^{-1}\cdot(v'_i - v_i)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Considérons aussi l'élément

$$\beta = [(\gamma \in F(U),\, u_\varepsilon \circ h : \bar{\mathbb{D}}^{n+1} \to U^{\mathrm{an}})]$$

de $An^*(F)(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}) = \operatorname{colim}_{X \in \bar{\mathbb{D}}^{n+1}\backslash(\mathsf{Sm}/k)} F(X)$. Par construction, on a $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\beta) = 0$ pour tout $(i,\epsilon) \in [\![2,n+1]\!]\times\{0,1\}$. De plus, on a les égalités $\mathrm{d}^*_{1,0}\beta = \alpha$ et $\mathrm{d}^*_{1,1}\beta = \alpha'$. Ceci montre que α et α' sont homologues. La surjectivité de (52) est établie.

Partie 2 : Injectivité. On fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et une classe d'homologie $[\gamma] \in \mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})))$ représentée par une section $\gamma \in F(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{li}})$ telle que $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\gamma) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\epsilon \in \{0,1\}$. On suppose que l'image de $[\gamma]$ dans $\mathrm{H}_n({}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}})))$ est nulle. Il existe donc une section $\beta \in {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_{n+1}(F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}})) \subset F(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}_{\text{li}})$ telle que $\mathrm{d}^*_{1,1}\beta = \gamma_{\text{li}}$ avec γ_{li} l'image de γ dans $F(\bar{\mathbb{D}}_{\text{li}})$. On cherche à montrer que γ est homologue à 0.

On peut trouver $(U,u) \in \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ et une section $\gamma_U \in F(U)$ qui relève γ. Quitte à raffiner (U,u), on peut supposer que U est affine et connexe, et que $(\gamma_U)_{|U/(t_i-\epsilon)} = 0$ pour tout $(i,\epsilon) \in [\![1,n]\!]\times\{0,1\}$. De même, on peut trouver $(V,v) \in \mathcal{V}_{\text{li}}(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}/\mathbb{A}^{n+1}_k)$ et une section $\beta_V \in F(V)$ qui relève β. Pour $(i,\epsilon) \in [\![1,n]\!]\times\{0,1\}$, on note $V_{i,\epsilon} = V \times_{\mathbb{A}^{n+1}_k,\mathrm{d}_{i,\epsilon}} \mathbb{A}^n_k$. C'est un $\mathbb{A}^n_k$-schéma lisse qui est isomorphe, en tant que k-schéma, à $V/(t_i-\epsilon)$. Par la propriété universelle du produit fibré, on a des morphismes évidents $v_{i,\epsilon} : \bar{\mathbb{D}}^n \to V^{\mathrm{an}}_{i,\epsilon}$ qui définissent des objets $(V_{i,\epsilon}, v_{i,\epsilon}) \in \mathcal{V}_{\text{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. Quitte à raffiner (V,v), on peut supposer que les propriétés suivantes sont satisfaites.

(a) V est affine et $(V_{1,1}, v_{1,1})$ domine (U,u), i.e., il existe une flèche $(V_{1,1}, v_{1,1}) \to (U,u)$ dans $\mathcal{V}_{\text{li}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$. De plus, on a $(\beta_V)_{|V_{1,1}} = (\gamma_U)_{|V_{1,1}}$.

(b) Pour tout $(i,\epsilon) \in ([\![1,n+1]\!]\times\{0,1\}) - \{(1,1)\}$, on a $(\beta_V)_{|V_{i,\epsilon}} = 0$.

Par le lemme 2.62 ci-dessous et quitte à raffiner une nouvelle fois (V,v), on peut supposer qu'il existe un morphisme étale de $\mathbb{A}^n_k$-schémas $e : V \to \mathbb{A}^{n+1}_k \times_k \mathbb{A}^r_k$. Comme dans la partie 1 de la preuve, on peut alors construire un objet $(W,w) \in \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}/\mathbb{A}^{n+1}_k)$ muni d'un morphisme de $\mathbb{A}^{n+1}_k$-schémas $d : W \to V$. On fera attention qu'en général $d^{\mathrm{an}} \circ w \neq v$, i.e., d n'induit pas une flèche dans $\mathcal{V}_{\text{li}}(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}/\mathbb{A}^{n+1}_k)$. Toutefois, les propriétés (a) et (b) ci-dessus entraînent, avec $\beta'_W = (\beta_V)_{|W}$, les propriétés suivantes :

(a′) $(\beta'_W)_{|W_{1,1}} = (\gamma_U)_{|W_{1,1}}$, la restriction de γ_U suivant la composition de $W_{1,1} \to V_{1,1} \to U$,

(b′) $(\beta'_W)_{|W_{i,\epsilon}} = 0$ pour $(i,\epsilon) \neq (1,1)$.

La section $\beta' \in F(W)$ définit une section $\beta' \in F(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}_{\text{ét}})$. Les propriétés (a′) et (b′) ci-dessus montrent que $\mathrm{d}^*_{1,1}(\beta') = \gamma$ et $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\beta') = 0$ pour $(i,\epsilon) \neq (1,1)$. Il vient que $[\gamma] = 0$. Le théorème est démontré. □

Le résultat suivant a servi dans la preuve du théorème 2.61 (cf. [6, lemme 2.4.17]).

Lemme 2.62. *Soit E une $k[t_1,\dots,t_n]$-algèbre lisse de type fini munie d'un morphisme de $k[t_1,\dots,t_n]$-algèbres $E \to \mathcal{A}_n$. Il existe alors une E-algèbre lisse de type fini E' et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & & E' \arrow[dr, bend left] & \\ k[t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_r] \arrow[urr, bend left, "e"] & & E \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{A}_n \\ & & k[t_1,\dots,t_n] \arrow[u] \arrow[ull, bend left] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

avec e un morphisme étale.

Démonstration. Il est clair qu'on peut supposer que $\sigma(k)$ est un sous-corps dense de $\mathbb{C}$. Quitte à remplacer E par une E-algèbre de la forme $E[M]$, avec M un E-module projectif bien choisi, on peut supposer que le E-module des différentielles relatives $\Omega_{E/k[t_1,\dots,t_n]}$ est libre de rang r. On se donne une présentation $p : k[t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_m] \twoheadrightarrow E$ et on note $I = p^{-1}(0)$ son noyau. On obtient alors une suite exacte courte de E-modules

$$0 \to I/I^2 \to \bigoplus_{i=1}^{m} E \cdot \mathrm{d}s_i \xrightarrow{\theta} \Omega_{E/k[t_1,\dots,t_n]} \to 0.$$

Comme $\Omega_{E/k[t_1,\dots,t_n]}$ est libre, il existe une matrice $(f_{ij})_{1\le i\le m;\,1\le j\le r} \in E^{m\times r}$ telle que $(\theta(\sum_{i=1}^m f_{ij}\cdot \mathrm{d}s_i))_{1\le j\le r}$ est une base de $\Omega_{E/k[t_1,\dots,t_n]}$. On pose alors $\omega_j = \sum_{i=1}^m f_{ij}\cdot \mathrm{d}s_i$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on choisit une matrice $(f^{\varepsilon}_{ij})_{1\le i\le m;\,1\le j\le r} \in (k[t_1,\dots,t_n])^{m\times r}$ telle que $\| f^{\varepsilon}_{ij} - f_{ij}\|_\infty \le \varepsilon$ (la norme infinie étant prise sur le polydisque fermé $\bar{\mathbb{D}}^n$). On pose aussi $\omega^{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^m f^{\varepsilon}_{ij}\cdot \mathrm{d}s_i$. Soit $M^{\varepsilon} \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(E)$ la matrice telle que $M^{\varepsilon}\theta(\omega_j) = \theta(\omega^{\varepsilon}_j)$ pour $1 \le j \le r$. Pour ε suffisamment petit, l'image de la matrice M^{ε} dans $\mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathcal{A}_n)$ est inversible. Pour un tel ε, le morphisme $E \to A$ se factorise par la $k[t_1,\dots,t_n]$-algèbre lisse $E[\det(M^{\varepsilon})^{-1}]$. Quitte à remplacer E par $E[\det(M^{\varepsilon})^{-1}]$, on peut donc supposer que M^{ε} est inversible. En d'autres termes, $(\theta(\omega^{\varepsilon}_j))_{1\le j\le r}$ est une base de Ω_{E/A_0}. Or, les ω^{ε}_j sont à coefficients dans $k[t_1,\dots,t_n]$. Quitte à faire une transformation $k[t_1,\dots,t_n]$-linéaire des coordonnées $(s_i)_{1\le i\le m}$, on peut donc supposer que $(\theta(\mathrm{d}s_j))_{1\le j\le r}$ est une base de $\Omega_{E/k[t_1,\dots,t_n]}$. Dans ce cas, la composition de $k[t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_r] \to k[t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_m] \twoheadrightarrow E$ est étale. Le lemme est démontré. □

Corollaire 2.63. *Soit K un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k. *Il existe alors un isomorphisme canonique* $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(K) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$ *dans la catégorie dérivée* $\mathbf{D}(\Lambda)$.

Démonstration. On ne restreint pas la généralité en supposant que K est projectivement cofibrant de sorte que $\mathsf{L}An^*(K) \simeq An^*(K)$ dans $\mathbf{AnDA}^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$. Le corollaire 2.26 entraîne alors que $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(An^*(K))$. Ce dernier s'identifie à $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{li}}(K)$ par le lemme 2.55. On peut maintenant appliquer le théorème 2.61 pour conclure. □

Remarque 2.64. Soit X un k-schéma lisse. Le corollaire 2.63, appliqué au préfaisceau $X \otimes \mathbb{Z}$, montre que le complexe de chaînes singulières de l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe dans $\mathbf{D}(\mathbb{Z})$ au complexe $\mathrm{N}(\mathrm{hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, X) \otimes \mathbb{Z})$.

Dans le reste de cette section, on construira un analogue de la transformation naturelle (37) pour le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. Ceci s'appliquera aussi aux foncteurs ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre). La notion de paire analytique complexe, introduite dans la définition 2.29, s'étend immédiatement aux k-schémas. Ainsi, une *k-paire algébrique* (ou simplement une *k-paire*) est un couple (X, Z) avec X un k-schéma lisse et Z une partie fermée de X égale à une réunion finie de sous-schémas fermés lisses. Les morphismes de k-paires sont ceux que l'on pense et les pro-k-paires sont les pro-objets dans la catégorie des k-paires. Étant données deux k-paires (X_1, Z_1) et (X_2, Z_2), leur smash-produit $(X_1, Z_1) \wedge_k (X_2, Z_2)$ est donné par $(X_1 \times_k X_2, Z_1 \times_k X_2 \cup X_1 \times_k Z_2)$. Le smash-produit de pro-k-paires est défini de la même manière. Étant donné un préfaisceau F sur Sm/k à valeurs dans une catégorie abélienne possédant les colimites filtrantes, on définit son extension à la catégorie des pro-k-paires par la même méthode utilisée dans le cas analytique complexe. Étant donnée une k-paire (X, Z), on note $\underline{\mathrm{hom}}((X, Z), F)$ le préfaisceau défini par l'association $U \in \mathsf{Sm}/k \rightsquigarrow F(X \times_k U, Z \times_k U)$. De même, étant donnée une pro-k-paire $(X_i, Z_i)_{i \in I}$, on note $\underline{\mathrm{hom}}((X_i, Z_i)_{i\in I}, F)$ la colimite suivant les $i \in I$ des préfaisceaux $\underline{\mathrm{hom}}((X_i, Z_i), F)$. Les analogues algébriques des lemmes 2.31 et 2.32 sont encore vrais.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \in \{0, 1\}$, on note $\partial_\epsilon \bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$ la réunion des $\mathrm{d}_{i,\epsilon}(\bar{\mathbb{D}}^{n-1}_{\text{ét}})$ lorsque i parcourt $[\![1, n]\!]$. On note aussi $\partial\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}} = \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}} \cup \partial_1\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$. On obtient ainsi des pro-k-paires algébriques $(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_\epsilon\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}})$ et $(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}})$. Étant donné un complexe $K_\bullet$ de préfaisceaux de Λ-modules sur Sm/k, le complexe (de complexes de préfaisceaux) $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{D}_{\text{ét}}, K))$ est donné en degré $n \geq 0$ par $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}), K)$. De plus, sa différentielle en degré $n \geq 1$ est donnée par la somme alternée des morphismes de restriction suivant les inclusions de pro-k-paires $\mathrm{d}_{i,1} : (\bar{\mathbb{D}}^{n-1}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n-1}_{\text{ét}}) \hookrightarrow (\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}})$.

Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a un morphisme canonique de pro-k-schémas lisses $\bar{\mathbb{D}}^{n+m}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}$. Ce morphisme est induit par le foncteur

$$\mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \times \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^m/\mathbb{A}^m_k) \to \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^{n+m}/\mathbb{A}^{n+m}_k)$$

qui envoie les objets $(V, v) \in \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)$ et $(U, u) \in \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^m/\mathbb{A}^m_k)$ sur $(V \times_k U, v \times u)$. Il est important de noter que, contrairement au morphisme analogue pour les pro-variétés analytiques $\bar{\mathbb{D}}^n$ et $\bar{\mathbb{D}}^m$, ce morphisme n'est pas inversible dès que les entiers m et n sont non nuls. Néanmoins, il induit un morphisme de pro-k-paires

$$(\bar{\mathbb{D}}^{n+m}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n+m}_{\text{ét}}) \to (\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}) \wedge_k (\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}).$$

Si K est un complexe de préfaisceaux sur Sm/k, on déduit aussitôt un morphisme de complexes (en complexes de préfaisceaux)

$$\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K))\big) \to \mathrm{C}_{\bullet+m}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)). \tag{53}$$

En degré $n \geq 0$, ce morphisme est égal à la composition de

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}), K)\big) &\simeq \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}) \wedge_k (\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), K\big) \\ &\to \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^{n+m}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n+m}_{\text{ét}}), K\big).\end{aligned}$$

En passant aux complexes totaux, on obtient une transformation naturelle (en K)

$$t_m : \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\big) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)[-m]^+. \tag{54}$$

2.2.5. Un modèle du foncteur composé $\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*$. Dans cette section, on donne une description concrète de l'endofoncteur $\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*$ de la catégorie $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$. Dans la suite, et sauf mention du contraire, on prendra pour T_k le préfaisceau $(\mathbb{P}^1_k,\infty)\otimes\Lambda = \mathbb{P}^1_k\otimes\Lambda/\{\infty\}\otimes\Lambda$. L'isomorphisme de foncteurs $T_k\otimes - \simeq (\mathbb{P}^1_k,\infty)\otimes -$ permet d'identifier la catégorie des T_k-spectres symétriques (ou non symétriques) avec celle des $[(\mathbb{P}^1_k,\infty)\otimes -]$-spectres symétriques (ou non symétriques) au sens de [5, définition 4.3.6]. Dans la suite, on utilisera librement cette identification.

Si $K_\bullet$ est un complexe de préfaisceaux sur Sm/k, on a une chaîne d'isomorphismes d'objets cubiques Σ-enrichis

$$\begin{aligned}\underline{\hom}\big(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}},\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k,\infty),K_\bullet)\big) &\xrightarrow{\sim} \underline{\hom}\big((\mathbb{P}^1_k,\infty)\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}},K_\bullet\big)\\ &\underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \underline{\hom}\big(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k(\mathbb{P}^1_k,\infty),K_\bullet\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \underline{\hom}\big((\mathbb{P}^1_k,\infty),\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}},K_\bullet)\big).\end{aligned}$$

En passant aux complexes simples et ensuite aux complexes totaux, on obtient un isomorphisme de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k,\infty),-)\big)\xrightarrow{\sim}\underline{\hom}\big((\mathbb{P}^1,\infty),\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(-)\big). \tag{55}$$

La transformation naturelle (55) permet de prolonger l'endofoncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ à la catégorie des T_k-spectres symétriques. Étant donné un T_k-spectre symétrique $\mathbf{E}$, le T_k-spectre symétrique $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ est donné au niveau $n\in\mathbb{N}$ par le complexe $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}_n)$. L'adjoint de son morphisme d'assemblage au niveau n est la composition de

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}_n)\xrightarrow{\gamma'_{\mathbf{E}}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k,\infty),\mathbf{E}_{n+1})\big)\underset{\sim}{\xrightarrow{(55)}}\underline{\hom}\big((\mathbb{P}^1_k,\infty),\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}_{n+1})\big). \tag{56}$$

En remplaçant ci-dessus « complexes simples » par « complexes normalisés » et « complexes alternés » (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre), on obtient également des prolongements des foncteurs ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ à la catégorie des T_k-spectres symétriques.

Pour $m\in\mathbb{N}$, le foncteur $\underline{\hom}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}},\partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}),-)$ s'étend aussi à la catégorie des T_k-spectres symétriques en complexes de préfaisceaux sur Sm/k et (54) induit une transformation

$$t_m:\underline{\hom}\big((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}},\partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}),\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})\big)\to\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-m]^+$$

naturelle en $\mathbf{E}\in\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)))$.

Par les corollaires 2.26 et 2.63, le complexe $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(T_k)$ est quasi-isomorphe à $\Lambda[2]$. On fixe un élément $\alpha\in T_k(\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}},\partial\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}})$ dont la classe d'homologie $[\alpha]$ est une base de Λ-module $\mathrm{H}_2(\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(T_k))$. La classe $[\alpha]$ est déterminée à multiplication près par un élément inversible de Λ. En particulier, lorsque $\Lambda=\mathbb{Z}$, la classe $[\alpha]$ est bien définie à un signe près. La section α définit une transformation $\alpha^*:\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k,\infty),K)\to\underline{\hom}((\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}},\partial\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}),K)$, naturelle en $K\in\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda))$, qui se prolonge à la catégorie des T_k-spectres symétriques.

Enfin, rappelons qu'on dispose d'une transformation $\lambda_{\mathbf{E}}:\mathbf{E}\to\mathrm{s}_-\underline{\hom}((\mathbb{P}^1,\infty),\mathbf{E})$, naturelle en les T_k-spectres symétriques $\mathbf{E}$, donnée au niveau n par la composition de

$$\mathbf{E}_n\xrightarrow{\gamma'_{\mathbf{E}}}\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k,\infty),\mathbf{E}_{n+1})\underset{\sim}{\xrightarrow{\tau^{-1}_{(n)}}}\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k,\infty),\mathbf{E}_{n+1}),$$

avec $\tau_{(n)}=(123\cdots(n+1))\in\Sigma_{n+1}$ agissant sur $\mathbf{E}_{n+1}$. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [5, p. 244–245]. Mettant tout cela ensemble, on peut faire la définition suivante.

Définition 2.65. Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur Sm/k.

(i) On note $\vartheta_{\mathbf{E}} : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2]$ la transformation naturelle donnée par la composition de

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}^1_k,\infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})\big) \\ \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})\big) \xrightarrow{t_2} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2].$$

(ii) On note $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ le T_k-spectre symétrique égal à la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \cdots \to \mathrm{s}^{n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n] \\ \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}^{n+1}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n-2] \to \cdots.$$

Remarque 2.66. En remplaçant dans la définition 2.65 (i) le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ par ${}^{\mathrm{n}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre), on obtient des transformations naturelles qu'on notera aussi $\vartheta_{\mathbf{E}}$. En faisant de même dans (ii), on obtient des T_k-spectres symétriques ${}^{\mathrm{n}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ et ${}^{\mathrm{a}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ qui sont quasi-isomorphes niveau par niveau à $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.67. *Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur Sm/k. On suppose que $\mathbf{E}$ est stablement projectivement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant. Alors, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ est aussi stablement projectivement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant et il existe un isomorphisme canonique $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$ dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$.*

La première assertion dans le théorème 2.67 découle immédiatement des deux lemmes ci-dessous.

Lemme 2.68. (a) *Soit K un complexe de préfaisceaux sur Sm/k. Si K est projectivement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant, il en est de même de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)$.*

(b) *Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur Sm/k. Si $\mathbf{E}$ est stablement projectivement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant, il en est de même de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$.*

Démonstration. Rappelons qu'un complexe de préfaisceaux sur Sm/k est projectivement Nis-fibrant si et seulement s'il possède la propriété de Brown–Gersten pour la topologie Nisnevich (voir [35, Definition 1.13]). À partir des constructions, il est immédiat que le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ préserve la propriété de Brown–Gersten. En utilisant l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathbb{A}^1_k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(-)\big) \simeq \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}^1_k,-)\big),$$

on déduit aussitôt que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ préserve les objets projectivement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-locaux.

On passe à la seconde partie. Par (a) on sait que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ est $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant niveau par niveau. Il reste donc à voir que les adjoints des morphismes d'assemblages de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ sont des quasi-isomorphismes. Ceci est clair (cf. (56)). □

Lemme 2.69. *Les colimites filtrantes préservent les complexes de préfaisceaux projectivement* $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$*-fibrants ainsi que les* T_k*-spectres stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$*-fibrants.*

Démonstration. Il s'agit d'un exercice facile qu'on laissera au lecteur. (Pour voir que les colimites filtrantes préservent les complexes de préfaisceaux projectivement Nis-fibrants, on utilise la caractérisation de ceux-ci par la propriété de Brown–Gersten.) □

On passe maintenant à la preuve de la seconde assertion du théorème 2.67 qui est bien entendu la plus significative. Pour cela, quelques préliminaires seront nécessaires. Soit K un complexe de préfaisceaux sur Sm/k. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un morphisme canonique de complexes de préfaisceaux de Λ-modules sur CpVar :

$$An^*(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, K)) \to \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}^n, An^*(K)). \tag{57}$$

Ce morphisme est donné sur les complexes de sections au-dessus de $V \in \mathsf{CpVar}$ par la composition de

$$\begin{aligned}\operatorname*{colim}_{X \in V\backslash(\mathsf{Sm}/k)} K(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}} \times_k X) &\simeq \operatorname*{colim}_{X \in V\backslash(\mathsf{Sm}/k)} \ \operatorname*{colim}_{(U,u) \in \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k)} K(U \times_k X) \\ &\to \operatorname*{colim}_{Y \in (\bar{\mathbb{D}}^n \times V)\backslash(\mathsf{Sm}/k)} K(Y),\end{aligned}$$

où la seconde flèche est induite par le foncteur

$$(V\backslash(\mathsf{Sm}/k)) \times \mathcal{V}_{\text{ét}}(\bar{\mathbb{D}}^n/\mathbb{A}^n_k) \to (\bar{\mathbb{D}}^n \times V)\backslash(\mathsf{Sm}/k)$$

qui associe à $((X, x : V \to X^{\text{an}}), (U, u : \bar{\mathbb{D}}^n \to U^{\text{an}}))$ le couple $(U \times_k X, u \times x)$. La collection des morphismes (57), pour $n \in \mathbb{N}$, définit un morphisme d'objets cubiques Σ-enrichis dans la catégorie des complexes de préfaisceaux sur CpVar. En passant aux complexes simples et ensuite aux complexes totaux, on obtient une transformation naturelle

$$An^*(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(An^*(K)). \tag{58}$$

Lemme 2.70. *Le morphisme de complexes*

$$\Gamma(\mathrm{pt}, An^*(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K))) \to \Gamma(\mathrm{pt}, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(An^*(K))),$$

induit par (58)*, est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. Le morphisme en question est la composition de

$$\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \to \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{li}}(K) \simeq \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(An^*(K)).$$

On utilise le théorème 2.61 pour conclure. □

La transformation naturelle (58) se prolonge naturellement aux catégories des T_k-spectres symétriques. De plus, pour $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique, on vérifie facilement que le carré

$$\begin{array}{ccc} An^* \, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) & \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} & \mathrm{s}_- \, An^* \, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(An^*\mathbf{E}) & \xrightarrow{\vartheta_{An^*\mathbf{E}}} & \mathrm{s}_- \, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(An^*\mathbf{E})[-2] \end{array}$$

est commutatif. Ceci fournit une transformation naturelle

$$An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E}). \tag{59}$$

Le lemme 2.70 entraîne immédiatement le résultat suivant.

Lemme 2.71. *Le morphisme* (59) *induit un quasi-isomorphisme de complexes après application du foncteur* $\Gamma(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_n(-))$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Pour continuer, on aura besoin du résultat technique suivant.

Lemme 2.72. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_k*-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur* Sm/k*. On suppose que* $\mathbf{E}$ *est un* Ω*-spectre. Alors,* $An^*(\mathbf{E})$ *est un* $\mathbf{\Lambda}$*-spectre symétrique.*

Démonstration. Par la remarque 2.57, on ne restreint pas la généralité en supposant que $\mathbf{E}$ est projectivement stablement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant. Soit $f : An^*(\mathbf{E}) \to \mathbf{F}$ une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable avec $\mathbf{F}$ un T_{pt}-spectre symétrique stablement projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(f)$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. Étant donné que $(\Sigma \otimes -, \mathrm{Oub}^{\Sigma})$ est une équivalence de Quillen pour les structures stables $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-locale et $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale, on déduit un isomorphisme canonique

$$\mathsf{L}An^* \circ \mathsf{R}\,\mathrm{Oub}^{\Sigma} \simeq \mathsf{R}\,\mathrm{Oub}^{\Sigma} \circ \mathsf{L}An^*.$$

En utilisant la remarque 2.57, on déduit alors que le morphisme $An^*(\mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{E})) \to \mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{F})$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. Or ce morphisme n'est autre que $\mathrm{Oub}^{\Sigma}(f)$ modulo l'identification $An^*(\mathrm{Oub}^{\Sigma}(\mathbf{E})) = \mathrm{Oub}^{\Sigma}(An^*(\mathbf{E}))$. □

Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur Sm/k. On fixe une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable $f : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E}) \to \mathbf{F}$ de but un T_{pt}-spectre symétrique projectivement stablement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant. En utilisant (59) et l'adjonction (An^*, An_*), on déduit un morphisme de T_k-spectres symétriques

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to An_*(\mathbf{F}) \simeq \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E})) \tag{60}$$

(l'isomorphisme à droite étant dans la catégorie homotopique). Supposons maintenant, comme dans l'énoncé du théorème 2.67, que $\mathbf{E}$ est stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant. Par le théorème 2.48 et le lemme 2.72, le morphisme canonique $An^*\mathbf{E} \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E}))$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. En particulier, $\mathbf{F}$ est un remplacement stablement projectivement $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-fibrant de $An^*\mathbf{E}$. On en déduit des isomorphismes

$$\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \simeq \mathsf{R}An_*An^*(\mathbf{E}) \simeq An_*(\mathbf{F})$$

dans $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$. Autrement dit, le morphisme (60) fournit un morphisme entre $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ et $\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$. Le théorème 2.67 découle donc du résultat suivant.

Proposition 2.73. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_k*-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur* Sm/k*. On suppose que* $\mathbf{E}$ *est stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$*-fibrant. Alors,* (60) *est un quasi-isomorphisme niveau par niveau.*

Démonstration. On se donne une équivalence $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$-locale niveau par niveau $g : An^*(\mathbf{E}) \to \mathbf{E}'$ de but $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$-fibrant niveau par niveau. Par le lemme 2.24 et le corollaire 2.27, le morphisme $g : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$-locale niveau par niveau. Par le théorème 2.23 (et en utilisant encore une fois le lemme 2.24), la source et le but de ce morphisme sont projectivement $\mathbb{D}^1$-locaux niveau par niveau. On en déduit aussitôt que ce morphisme est une équivalence usu-locale niveau par niveau. On peut supposer qu'il existe une factorisation $f = f' \circ g$ avec $f' : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}') \to \mathbf{F}$. Par le théorème 2.48 et le lemme 2.72, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E})$ est un Ω-spectre qui est $\mathbb{D}^1$-local niveau par niveau. Il vient que f est une équivalence usu-locale niveau par niveau. Il en est donc de même de f'. En particulier, $\mathbf{F}$ est un remplacement stablement projectivement $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$-fibrant de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$. On montrera d'abord que $An_*(f') : An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}') \to An_*(\mathbf{F})$ est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. En utilisant la partie instable du lemme 2.6, on voit que le foncteur

$$\begin{aligned} \mathsf{R}An_* : \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1-\text{usu}-\text{niv}}\big(\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_{\text{pt}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{CpVar}, \Lambda)))\big) \\ \to \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1-\text{Nis}-\text{niv}}\big(\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)))\big) \end{aligned}$$

commute aux sommes infinies et donc aussi aux $\mathbb{N}$-colimites homotopiques (ci-dessus, on considère les catégories homotopiques des structures $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-locale et $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$-locale niveau par niveau). Or, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$ est la $\mathbb{N}$-colimite des T_{pt}-spectres $\mathrm{s}^{n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}')[-2n]$. Par le lemme 2.28, ces derniers sont $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$-fibrants niveau par niveau puisque $\mathbf{E}'$ l'est. Il vient que $\mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$, qui est précisément $An_*(\mathbf{F})$, est naturellement isomorphe à la colimite des $An_*(\mathrm{s}^{n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}')[-2n])$. Cette colimite est égale à $An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$. Ceci démontre que $An_*(f')$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-locale niveau par niveau. Pour montrer que c'est plus précisément un quasi-isomorphisme niveau par niveau, il reste à voir que les deux T_k-spectres symétriques $An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$ et $An_*\mathbf{F}$ sont projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-fibrants niveau par niveau. Pour $An_*(\mathbf{F})$, c'est clair puisque An_* est un foncteur de Quillen à droite. Pour l'autre T_k-spectre, on utilise qu'il est égal à la $\mathbb{N}$-colimite de T_k-spectres symétriques $An_*(\mathrm{s}^{n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(\mathbf{E}')[-2n])$, que ces derniers sont $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-fibrants niveau par niveau et que cette propriété est préservée par les colimites filtrantes (voir le lemme 2.69).

À présent, il reste à prouver que la composition de

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E}) \xrightarrow{g} An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}') \tag{61}$$

est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Pour cela, on fixe un k-schéma lisse X et un entier $n \in \mathbb{N}$, et on montre que le foncteur $\Gamma(X, \text{Ev}_n(-))$ transforme (61) en un quasi-isomorphisme de complexes de Λ-modules. On dispose d'un isomorphisme naturel

$$\Gamma(X, \text{Ev}_n(-)) \simeq \Gamma(\text{Spec}(k), \text{Ev}_n\, \underline{\text{hom}}(X, -)).$$

Par ailleurs, on a un diagramme commutatif de T_k-spectres symétriques :

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{hom}}(X, An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')) \arrow[dddd, bend left=60, "\sim"] \\
\underline{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \underline{\mathrm{hom}}(X, An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E})) \arrow[u, "g"'] \arrow[d, "\sim"] \\
\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{E})) \arrow[d] & An_*\underline{\mathrm{hom}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E})) \arrow[d, "\sim"] \\
An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\underline{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{E})) \arrow[r] & An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\underline{\mathrm{hom}}(X^{\mathrm{an}}, An^*\mathbf{E})) \arrow[d, "g"] \\
 & An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\underline{\mathrm{hom}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{E}')).
\end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que le foncteur $\Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_n(-))$ transforme la composition de

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{E})) \to An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\underline{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{E})) \to An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\underline{\mathrm{hom}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{E}'))$$

en un quasi-isomorphisme de complexes de Λ-modules. Le morphisme

$$An^*\underline{\mathrm{hom}}(X, \mathbf{E}) \to \underline{\mathrm{hom}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{E}')$$

est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable. En effet, ce morphisme s'identifie, dans $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$, au morphisme canonique

$$An^*\underline{\mathsf{Hom}}(M, \mathbf{E}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(An^*(M), An^*(\mathbf{E}))$$

avec $M = \mathrm{Sus}^0_{T_k}(X \otimes \Lambda)$, le motif de X. Ce dernier étant un objet compact de $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$, il est fortement dualisable. Le résultat affirmé découle alors du lemme 2.17. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $X = \mathrm{Spec}(k)$. Autrement dit, on terminera la preuve si on démontre que $\Gamma(k, \mathrm{Ev}_n(-))$ transforme (61) en un quasi-isomorphisme de complexes de Λ-modules.

Le théorème 2.48 (joint au lemme 2.72) entraîne que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E})) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}')$ est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale stable entre des Ω-spectres qui sont $\mathbb{D}^1$-locaux niveau par niveau. C'est donc une équivalence usu-locale niveau par niveau. On en déduit donc que

$$\Gamma(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_n\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E}))) \to \Gamma(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_n\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E}'))$$

est un quasi-isomorphisme. Pour terminer, il reste donc à voir que

$$\Gamma(k, \mathrm{Ev}_n\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(\mathbf{E})) \to \Gamma(\mathrm{pt}, \mathrm{Ev}_n\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E})))$$

est aussi un quasi-isomorphisme. Ceci découle immédiatement du lemme 2.71. □

On note le résultat ci-dessous, qui est une conséquence de la construction de l'isomorphisme du théorème 2.67.

Corollaire 2.74. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_k*-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur* Sm/k. *On suppose que* $\mathbf{E}$ *est stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$*-fibrant.*

(a) *Modulo l'isomorphisme* $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$ *du théorème* 2.67*, le morphisme d'unité* $\mathbf{E} \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$ *correspond au morphisme évident* $\mathbf{E} \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$.

(b) *Il existe un diagramme commutatif dans* $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$ *:*

$$\begin{tikzcd} An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(59)"'] & An^*\mathsf{R}An_*An^*(\mathbf{E}) \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}An^*(\mathbf{E}) & An^*(\mathbf{E}). \arrow[l, "\sim"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. La partie (a) est claire. La partie (b) s'obtient facilement à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, equal] & An^*An_*An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "(59)"] \arrow[d, "\delta"] & An^*An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}An^*(\mathbf{E}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & An^*An_*(\mathbf{F}) \arrow[d, "\delta"] \\ & An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "(59)"] & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}An^*(\mathbf{E}) \arrow[r] & \mathbf{F}. \end{tikzcd}$$

Les détails sont omis. □

2.2.6. Compléments relatifs à la counité de l'adjonction ($\mathsf{Bti}^*, \mathsf{Bti}_*$). Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur Sm/k, et supposons qu'il est stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-fibrant. Par le théorème 2.67, on dispose de deux isomorphismes

$$\text{(62)}\quad \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}).$$

Dans cette section, on cherche à décrire le morphisme $\delta : \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$, induit par la couinté de l'adjonction $(\mathsf{Bti}^*, \mathsf{Bti}_*)$, modulo les isomorphismes (62).

On commence par quelques constructions supplémentaires. La famille des morphismes $\bar{\mathbb{D}}^{m+n}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$, pour $m, n \in \mathbb{N}$, font de $\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ un objet cocubique pseudo-comonoïdal symétrique Σ-enrichi (au sens *opposé* à celui de la définition A.27). On dispose donc d'un morphisme de pro-k-schémas bicocubiques $\text{cm} : \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\langle 2\rangle \to \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ (voir la discussion qui suit la définition A.27). Soit $K_\bullet$ un complexe de préfaisceaux sur Sm/k. On associe un morphisme d'objets bicubiques en prenant la composition de

$$\underline{\text{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, \underline{\text{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)) \simeq \underline{\text{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K) \xrightarrow{\text{cm}^*} \underline{\text{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\langle 2\rangle, K) = \underline{\text{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)\langle 2\rangle.$$

En passant aux complexes simples puis aux complexes totaux, et en utilisant la proposition A.24, on obtient un morphisme naturel

$$\text{(63)}\qquad \text{m} : \underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)) \to \underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K).$$

On déduit à partir de la construction que le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K))) \arrow[r, "\text{m}(\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}})"] \arrow[d, "\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\text{m})"'] & \underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)) \arrow[d, "\text{m}"] \\ \underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)) \arrow[r, "\text{m}"] & \underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \end{tikzcd}$$

commute. Autrement dit, $\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ est naturellement une monade. En remplaçant ci-dessus « complexe simple » par « complexe normalisé » et « complexe alterné » (si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre), on obtient des morphismes analogues à (63) pour les foncteurs ${}^{\text{n}}\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et ${}^{\text{a}}\underline{\text{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. La vérification du résultat suivant est facile et sera laissée en exercice.

Lemme 2.75. *Le carré suivant (cf.* (37)*) est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K))) & \xrightarrow{t_m} & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K))[-m]^+ \\
{\scriptstyle \mathrm{m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{m}} \\
\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)) & \xrightarrow{t_m} & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)[-m]^+.
\end{array}$$

Pour rendre la situation plus symétrique, on est amené à introduire l'analogue à gauche de la transformation naturelle t_m. On a un morphisme de complexes (en complexes de préfaisceaux)

$$\mathrm{C}_\bullet\big(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m), K))\big) \to \mathrm{C}_{m+\bullet}(\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K))$$

donné en degré n par $(-1)^{mn}$ fois la composition de

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n), \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), K)\big) &\simeq \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^n), K) \\
&\to \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^{m+n}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{m+n}_{\text{ét}}), K).
\end{aligned}$$

En passant aux complexes totaux, on obtient une transformation naturelle

$$t'_m : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{D}^m_{\text{ét}}, \partial\mathbb{D}^m_{\text{ét}}), K)\big) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)[-m]^+.$$

Comme pour t_m, la transformation naturelle t'_m passe aux quotients et fournit deux transformations naturelles analogues, qu'on notera également t'_m, pour les foncteurs ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. Le résultat suivant est immédiat.

Lemme 2.76. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), K))\big) & \xrightarrow{t'_m} & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)[-m]^+\big) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\big)[-m]^+ \\
{\scriptstyle \mathrm{m}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{m}} \\
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), K)\big) & & \xrightarrow{\qquad t'_m \qquad} & & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)[-m]^+
\end{array}$$

est commutatif. (Ci-dessus, pour un complexe de préfaisceaux L, l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L[-m]^+) \simeq \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)[-m]^+$ est donné sur le facteur $\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^p, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p), L_n)$ par l'identité fois $(-1)^{mp}$.)

Considérons l'isomorphisme d'objets cubiques (en complexes de préfaisceaux)

$$\tau^* : \underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)\big) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{hom}}\big(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, \underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), K)\big)$$

induit par l'isomorphisme de permutation des facteurs $\tau : (\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}) \wedge \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \simeq \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \wedge (\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}})$. On a le résultat suivant.

Proposition 2.77. *Le triangle*

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{hom}}\big((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\big) & \xrightarrow{t_m} & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)[-m]^+ \\
{\scriptstyle \tau^*}\downarrow{\scriptstyle \sim} & \nearrow{\scriptstyle t'_m} & \\
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{hom}}((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}), K)\big) & &
\end{array} \tag{64}$$

est commutatif à une homotopie près (naturelle en K).

Démonstration. Notons, comme dans la proposition A.16, $\mathrm{C}^{\mathrm{d},m}_{\bullet}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K))$ le sous-complexe de $\mathrm{C}_{\bullet}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K))$ nul en degrés strictement plus petits que m et donné par l'intersection des noyaux des $\mathrm{d}^*_{i,1}$ pour $n+1 \leq i \leq n+m$ en degré $n+m$ (avec $n \geq 0$). Il est alors clair que le morphisme (53) se factorise de la manière suivante :

$$\underline{\hom}\big((\bar{\mathbb{D}}^{\bullet}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{\bullet}_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^{m}_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^{m}_{\text{ét}}), K\big) \to \mathrm{C}^{\mathrm{d},m}_{\bullet+m}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)) \xrightarrow{\text{(a)}} \mathrm{C}_{\bullet+m}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)),$$

avec (a) l'inclusion évidente. Par le corollaire A.18, le morphisme (a) est homotope au morphisme donné en degré $n \geq 0$ par

$$(-1)^{m(m+n+1)}\tau^*_{m,n} : \mathrm{C}^{\mathrm{d},m}_{n+m}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)) \to \mathrm{C}_{n+m}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K)).$$

(Rappelons que $\tau_{m,n} \in \Sigma_{m+n}$ est la permutation qui induit des bijections croissantes entre les ensembles $[\![1, m]\!]$ et $[\![n+1, n+m]\!]$, et les ensembles $[\![m+1, m+n]\!]$ et $[\![1, n]\!]$ respectivement.) On en déduit aussitôt que (53) est naturellement homotope au morphisme donné en degré n par la composition de

$$\begin{aligned}\underline{\hom}\big((\bar{\mathbb{D}}^{n}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n}_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^{m}_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^{m}_{\text{ét}}), K\big) &\xrightarrow{(-1)^{mn}\tau^*} \underline{\hom}\big((\bar{\mathbb{D}}^{m}_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^{m}_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^{n}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{n}_{\text{ét}}), K\big)\\ &\to \underline{\hom}\big((\bar{\mathbb{D}}^{m+n}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{m+n}), K\big).\end{aligned}$$

(Utiliser que $(-1)^{m(m+n+1)} = (-1)^{mn}$.) La proposition est démontrée. □

Remarque 2.78. Il est facile de se convaincre que le triangle (64) n'est pas commutatif en général. C'est aussi le cas pour le triangle analogue avec ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ au lieu de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. Toutefois, si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, le triangle analogue avec ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ au lieu de $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ commute. Ceci découle immédiatement du fait que la signature de $\tau_{m,n}$ est égale à $(-1)^{mn}$.

On passe maintenant à la catégorie de T_k-spectres symétriques. À l'instar de t_m, la transformation naturelle t'_m se prolonge à la catégorie des T_k-spectres symétriques. De plus, la proposition 2.77 est encore vraie pour ce prolongement. De même, la transformation naturelle (63) se prolonge à la catégorie des T_k-spectres symétriques. De plus, les lemmes 2.75 et 2.76 sont encore vrais pour ce prolongement.

Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique. On construit l'analogue à gauche $\vartheta'_{\mathbf{E}}$ du morphisme naturel $\vartheta_{\mathbf{E}}$ (cf. définition 2.65) en prenant la composition de

$$\begin{aligned}\text{(65)}\qquad \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) &\xrightarrow{\lambda} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\hom}((\mathbb{P}^1_k, \infty), \mathbf{E})\big)\\ &\xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\hom}((\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}), \mathbf{E})\big) \xrightarrow{t'_2} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2].\end{aligned}$$

On définit aussi un T_k-spectre symétrique $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ par la colimite de la $\mathbb{N}$-suite

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) &\xrightarrow{\vartheta'_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2]\\ &\xrightarrow{\vartheta'_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}} \cdots \to \mathrm{s}^n_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n] \xrightarrow{\vartheta'_{\mathrm{s}^n_{-}\mathbf{E}}} \mathrm{s}^{n+1}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n-2] \to \cdots.\end{aligned}$$

On remplaçant ci-dessus $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ par ${}^{\mathrm{n}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$, on obtient deux foncteurs qu'on notera ${}^{\mathrm{n}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$ et ${}^{\mathrm{a}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$.

Proposition 2.79. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_k*-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur* Sm/k.

(a) *Alors, les morphismes* $\vartheta_{\mathbf{E}}$, $\vartheta'_{\mathbf{E}} : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2]$ *sont naturellement homotopes.*

(b) *Supposons que* Λ *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre. Alors, les morphismes*

$$\vartheta_{\mathbf{E}},\ \vartheta'_{\mathbf{E}} : {}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathrm{s}_{-}\,{}^{\mathrm{a}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2]$$

sont égaux.

Démonstration. La partie (a) découle de la proposition 2.77. La partie (b) découle de la remarque 2.78. □

Lemme 2.80. *Le carré ci-dessous est commutatif :* [10)]

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{E}}"'] & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{E}}"] \\
\mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[r, "\vartheta_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}"] & \mathrm{s}_{-}^{2}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-4].
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe des constructions. La preuve est omise. □

Corollaire 2.81. *Il existe deux transformations naturelles en* $\mathbf{E}$ *:*

$$\vartheta'_{\mathbf{E}} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathrm{s}_{-}\,\mathbf{E})[-2] \quad \textit{et} \quad \vartheta_{\mathbf{E}} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathrm{s}_{-}\,\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2].$$

Les colimites des deux $\mathbb{N}$*-suites*

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \xrightarrow{\vartheta'_{\mathbf{E}}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathrm{s}_{-}\,\mathbf{E})[-2] \xrightarrow{\vartheta'_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}} \cdots \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathrm{s}_{-}^{n}\,\mathbf{E})[-2n] \xrightarrow{\vartheta'_{\mathrm{s}_{-}^{n}\mathbf{E}}} \cdots,$$
$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \mathrm{s}_{-}\,\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \cdots \to \mathrm{s}_{-}^{n}\,\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n] \xrightarrow{\vartheta_{\mathbf{E}}} \cdots$$

s'identifient canoniquement et on notera $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ *leur colimite commune. Lorsque le* T_k*-spectre symétrique* $\mathbf{E}$ *est stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-fibrant,* $\vartheta'_{\mathbf{E}}$ *et* $\vartheta_{\mathbf{E}}$ *sont des quasi-isomorphismes niveau par niveau.*

Démonstration. La transformation naturelle $\vartheta'_{\mathbf{E}}$ est obtenue par passage à la colimite à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{E}}"'] & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{E}}"] \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{E}}"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{s}_{-}^{n}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n] \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{E}}"] & \cdots \\
\mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] \arrow[r, "\vartheta_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}"] & \mathrm{s}_{-}^{2}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-4] \arrow[r, "\vartheta_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{s}_{-}^{n+1}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n-2] \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

---

10) On notera que si l'on prend $\vartheta_{\mathbf{E}}$ au lieu de $\vartheta_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}$ pour la flèche horizontale inférieure, on obtient un carré non commutatif !

L'autre transformation naturelle s'obtient par passage à la colimite à partir du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) & \xrightarrow{\vartheta'_{\mathbf{E}}} & \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] & \xrightarrow{\vartheta'_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}} & \cdots \longrightarrow & \mathrm{s}^{n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n] & \longrightarrow & \cdots \\
{\scriptstyle\vartheta_{\mathbf{E}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}} & & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta_{\mathrm{s}^{n}_{-}\mathbf{E}}} & & \\
\mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2] & \xrightarrow{\vartheta'_{\mathbf{E}}} & \mathrm{s}^{2}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-4] & \xrightarrow{\vartheta'_{\mathrm{s}_{-}\mathbf{E}}} & \cdots \longrightarrow & \mathrm{s}^{n+1}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2n-2] & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

La deuxième assertion du corollaire est claire : les colimites des deux $\mathbb{N}$-suites sont égales à la colimite du système inductive

$$\left(\mathrm{s}^{m+n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2m-2n]\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \tag{66}$$

où les morphismes de transition associés à $(m,n)\to(m+1,n)$ et $(m,n)\to(m,n+1)$ sont induits de $\vartheta_{\mathrm{s}^{n}_{-}\mathbf{E}}$ et $\vartheta'_{\mathrm{s}^{n}_{-}\mathbf{E}}$ respectivement.

Pour terminer, supposons que $\mathbf{E}$ est stablement projectivement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant. Dans ce cas, les morphismes $\vartheta_{\mathrm{s}^{m}_{-}\mathbf{E}}$ et $\vartheta_{\mathbf{E}}$ coïncident après localisation par les quasi-isomorphismes niveau par niveau. Ceci découle immédiatement de la construction de la transformation naturelle ϑ et de la propriété analogue pour $\lambda : \mathrm{id}\to \mathrm{s}_{-}\,\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{P}^1_k,\infty),-)$. Il en est de même des morphismes $\vartheta'_{\mathrm{s}^{n}_{-}\mathbf{E}}$ et $\vartheta'_{\mathbf{E}}$. Par ailleurs, la proposition 2.79 entraîne aussitôt que, après localisation par les quasi-isomorphismes niveau par niveau, $\vartheta_{\mathbf{E}}$ et $\vartheta'_{\mathbf{E}}$ coïncident. On en déduit aussitôt que $\vartheta'_{\mathbf{E}}$ coïncide avec l'identité de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ après localisation par les quasi-isomorphismes niveau par niveau. En particulier, c'est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Le même argument vaut également pour $\vartheta_{\mathbf{E}}$. □

Il existe une transformation naturelle (en $\mathbf{E}$)

$$\mathrm{m} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}). \tag{67}$$

En effet, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ est clairement la colimite du système inductif

$$\left(\mathrm{s}^{m+n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \circ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2m-2n]\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \tag{68}$$

où les morphismes de transition associés à $(m,n)\to(m+1,n)$ et $(m,n)\to(m,n+1)$ sont induits de $\vartheta_{\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathrm{s}^{n}_{-}\mathbf{E})}$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\vartheta'_{\mathrm{s}^{n}_{-}\mathbf{E}})$ respectivement. De plus, les lemmes 2.75 et 2.76 entraînent que les morphismes

$$\mathrm{m} : \mathrm{s}^{m+n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \circ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2m-2n] \to \mathrm{s}^{m+n}_{-}\,\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})[-2m-2n]$$

fournissent un morphisme de systèmes inductifs de (68) dans (66). Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.82. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_k*-spectre symétrique stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-fibrant. Le morphisme* (67) *est canoniquement isomorphe au morphisme*

$$\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$$

induit par la counité de l'adjonction $(\mathsf{Bti}^*,\mathsf{Bti}_*)$.

Démonstration. Par le corollaire 2.74, on sait que le morphisme

$$An^* \mathsf{R}An_* An^*(\mathbf{E}) \to An^*(\mathbf{E}),$$

induit par la counité de l'adjonction (An^*, An_*), est canoniquement isomorphe dans $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$ à (59). D'autre part, on peut définir, pour les T_{pt}-spectres symétriques en préfaisceaux sur CpVar, des foncteurs $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}$ de la même manière qu'on a défini $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}$. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) & \longrightarrow & An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) & \longleftarrow & An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*\mathbf{E}) & \longrightarrow & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}(An^*\mathbf{E}) & \longleftarrow & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}(An^*\mathbf{E}). \end{array}$$

Le corollaire 2.74 est encore valable pour ces foncteurs et on déduit en particulier que $An^*\mathsf{R}An_*An^*(\mathbf{E}) \to An^*(\mathbf{E})$ est canoniquement isomorphe dans $\mathbf{AnDA}(\Lambda)$ à

$$\text{« } \delta \text{ »} : An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}(An^*\mathbf{E}).$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) & \xrightarrow{\quad \mathrm{m} \quad} & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \\ {\scriptstyle (a)}\downarrow & & \\ \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) & & \downarrow{\scriptstyle (b)} \\ {\scriptstyle \text{« }\delta\text{ »}}\downarrow & & \\ \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}(An^*\mathbf{E}) & \xrightarrow{\mathrm{m}} & \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}(An^*\mathbf{E}) \end{array}$$

est commutatif. Les morphismes (a) et (b) ci-dessus sont des isomorphismes dans $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$ par le théorème 2.67 (et ses variantes pour les foncteurs $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}$). Pour terminer la preuve du théorème, il reste à voir que le morphisme

$$\mathrm{m} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}(\mathbf{F}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}(\mathbf{F})$$

est un quasi-isomorphisme niveau par niveau pour tout $\mathbf{F}$ un T_{pt}-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur CpVar. (Contrairement à son analogue algébrique (67) !) Pour cela, il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}} \circ \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(F) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}(F)$ est un quasi-isomorphisme pour tout F un complexe de préfaisceaux sur CpVar. Puisque

$$\bar{\mathbb{D}}^{m+n} = \bar{\mathbb{D}}^m \times \bar{\mathbb{D}}^n$$

(alors que $\bar{\mathbb{D}}^{m+n}_{\text{ét}} \neq \bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$, si m et n sont non nuls), on voit immédiatement que ce morphisme est simplement $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}\langle 2\rangle, F))) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}, F)))$. La proposition A.24 permet maintenant de conclure. □

2.2.7. Compléments relatifs aux structures multiplicatives. Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique en complexes de préfaisceaux sur Sm/k, et supposons le stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant. Supposons aussi que $\mathbf{E}$ est une algèbre. Alors, $\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$ est une algèbre, et nous cherchons dans cette section à décrire sa multiplication modulo l'isomorphisme $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E})$ du théorème 2.67. On obtiendra une telle description comme un cas particulier du théorème 2.87 ci-dessous.

On commence d'abord par munir $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ de quelques structures liées au produit tensoriel sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda))$. Soient K et L deux complexes de préfaisceaux sur Sm/k. Étant donnée une k-paire (W,T), on dispose d'une transformation binaturelle (en K et L) $K\otimes \underline{\mathrm{hom}}((W,T),L)\to \underline{\mathrm{hom}}((W,T),K\otimes L)$. Elle envoie un tenseur

$$a\otimes b\in K(\dagger)\otimes L(W\times_k \dagger, T\times_k \dagger)$$

sur $a_{|W\times_k\dagger}\otimes b\in (K\otimes L)(W\times_k\dagger, T\times_k\dagger)$. On a aussi une transformation binaturelle similaire lorsque (W,T) est remplacée par une pro-k-paire. En particulier, on dispose d'un morphisme d'objets cubiques $K\otimes\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}},L)\to\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}},K\otimes L)$. En passant aux complexes simples et ensuite aux complexes totaux, on obtient une transformation binaturelle $\mathrm{c}: K\otimes\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)\to\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L)$. En utilisant les isomorphismes de commutativité, on obtient aussi une transformation binaturelle $\mathrm{c}':\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\otimes L\to\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L)$ qui fait commuter le carré que l'on pense. On appelle $\mathrm{m}:\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\otimes\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)\to\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L)$ la composition de

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\otimes\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)\xrightarrow{\mathrm{c}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\big(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\otimes L\big)\xrightarrow{\mathrm{c}'}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\circ\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L)\xrightarrow{\mathrm{m}}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L).$$

Il est facile de voir que, muni de ce morphisme, $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ est un naturellement un foncteur pseudo-monoïdal. Il en est de même de $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}=\Gamma(\mathrm{Spec}(k),\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(-))$ puisque $\Gamma(\mathrm{Spec}(k),-)$ est un foncteur monoïdal. On note le résultat suivant.

Proposition 2.83. *Modulo l'isomorphisme du corollaire* 2.63 *la composition de*

$$\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)\to\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\otimes\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)\xrightarrow{\mathrm{m}}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L)$$

coïncide avec la composition de

$$\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(K)\overset{\mathsf{L}}{\otimes}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(L)\simeq\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(K\overset{\mathsf{L}}{\otimes}L)\to\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(K\otimes L).$$

Démonstration. On ne restreint pas le généralité en supposant que K et L sont projectivement cofibrants. Dans ce cas, il s'agit de montrer que $\mathrm{m}:\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K)\otimes\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(L)\to\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K\otimes L)$ coïncide avec l'isomorphisme naturel $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(K)\otimes\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(L)\simeq\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}\,*}(K\otimes L)$. On dispose de transformations binaturelles c, c' et m pour le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ similaires à celles pour le foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. De plus, la transformation naturelle

$$\Gamma(\mathrm{Spec}(k),\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(-))\to\Gamma(\mathrm{pt},\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}\,An^*(-))$$

est un morphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux. On est donc ramené à comparer $\mathrm{m}:\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(K')\otimes\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(L')\to\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K'\otimes L')$ avec $\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt},K')\otimes\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt},L')\to\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt},K'\otimes L')$, où $K'=An^*(K)$ et $L'=An^*(L)$. Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{id}\to\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ est un morphisme de foncteurs pseudo-monoïdaux pour conclure. □

Rappelons que la catégorie $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)))$ est monoïdale. Étant donnés deux T_k-spectres symétriques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$, le T_k-spectre symétrique $\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}$ est donné en degré n par le coégalisateur de la double flèche

$$\bigoplus_{a+b+c=n}\mathrm{ind}^{\Sigma_n}_{\Sigma_a\times\Sigma_b\times\Sigma_c}\mathbf{E}_a\otimes[(\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge b}\otimes\Lambda]\otimes\mathbf{F}_c\rightrightarrows\bigoplus_{i+j=n}\mathrm{ind}^{\Sigma_n}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{F}_j.$$

Ci-dessus, une des flèches est induite par les morphismes d'assemblage du spectre **F**. L'autre flèche est induite par les isomorphismes de symétrie et les morphismes d'assemblage du spectre **E**. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [5, §4.3.5]. On vérifie immédiatement que les transformations naturelles c, c′ et m, introduites ci-dessus, se prolongent aux T_k-spectres symétriques. Par ailleurs, on dispose d'une transformation binaturelle (en **E** et **F**) $\mathbf{E} \otimes \mathrm{s}_- \mathbf{F} \to \mathrm{s}_-(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})$ induite en degré n par les morphismes

$$\mathrm{ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{F}_{j+1} \to \mathrm{ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_{j+1}}^{\Sigma_{n+1}} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{F}_{j+1}$$

(avec $i + j = n$). On a le résultat suivant dont la preuve est omise.

Lemme 2.84. *Les deux diagrammes*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \otimes \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[r, "\vartheta_{\mathbf{F}}"] \arrow[d, "\mathrm{c}"'] & \mathbf{E} \otimes (\mathrm{s}_- \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{F})[-2]) \arrow[r] & \mathrm{s}_-(\mathbf{E} \otimes \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{F}))[-2] \arrow[d, "\mathrm{c}"] \\
\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \arrow[rr, "\vartheta_{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}"] & & \mathrm{s}_- \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})[-2]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \otimes \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[rr, "\mathrm{c}"] \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{F}}"'] & & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \arrow[d, "\vartheta'_{\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}}"] \\
\mathbf{E} \otimes \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathrm{s}_- \mathbf{F})[-2] \arrow[r, "\mathrm{c}"] & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathrm{s}_- \mathbf{F})[-2] \arrow[r] & \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\, \mathrm{s}_-(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})[-2]
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

On déduit aussitôt du lemme 2.84 deux transformations binaturelles

$$\begin{aligned}
\mathrm{c} : \mathbf{E} \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) &\to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}), \\
\mathrm{c} : \mathbf{E} \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) &\to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}),
\end{aligned} \tag{69}$$

ainsi qu'une transformation binaturelle similaire pour le foncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}$. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{c}"] & \mathbf{E} \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[d, "\mathrm{c}"] & \mathbf{E} \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{c}"] \\
\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \arrow[r] & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Le résultat clef de cette section est le suivant.

Théorème 2.85. *Soient* **E**, **F** *et* **G** *des T_k-spectres symétriques. On suppose que* **F** *et* **G** *sont projectivement stablement* $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$*-fibrants. On se donne un morphisme* $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \to \mathbf{G}$. *Alors, la composition de*

$$\mathbf{E} \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \to \mathbf{E} \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \xrightarrow{\mathrm{c}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{G}) \tag{70}$$

coïncide, dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$*, avec la composition de*

$$\begin{aligned}(71)\qquad \mathbf{E} \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\, \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}) &\xrightarrow{c_g} \mathsf{Bti}_*(\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\, \mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}))\\ &\xrightarrow{\sim} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E} \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\, \mathbf{F}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{G})\end{aligned}$$

modulo les isomorphismes $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{F})$ *et* $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{G}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{G})$ *du théorème* 2.67*. Ci-dessus,* c_g *est le morphisme structural du* Bti^**-coprojecteur* Bti_* *(cf. lemme* 1.16*).*

Démonstration. L'analogue analytique $\mathrm{c} : (-)\otimes\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(-) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(-\otimes-)$ pour les T_{pt}-spectres symétriques de la transformation naturelle (69) se construit comme précédemment. Il est alors facile de voir que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
An^*(\mathbf{E}\otimes\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F})) \arrow[r, "\mathrm{c}"] \arrow[d, "\sim"'] & An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}) \arrow[r] & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})) \arrow[d, "\sim"] \\
An^*(\mathbf{E})\otimes An^*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[r] & An^*(\mathbf{E})\otimes\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{F})) \arrow[r, "\mathrm{c}"] & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E})\otimes An^*(\mathbf{E}))
\end{tikzcd}$$

commute (par passage à la colimite, il suffit de vérifier que le diagramme similaire pour $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}$ commute). Ceci nous permet de former le diagramme commutatif (dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$) suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E}\,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\,\mathsf{R}An_*An^*(\mathbf{F}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "c_g"'] & \mathbf{E}\,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\,\mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}An^*(\mathbf{F}) \arrow[d, "c_g"] & \mathbf{E}\,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\,\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
\mathsf{R}An_*(An^*(\mathbf{E})\,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\,An^*(\mathbf{F})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathsf{R}An_*(An^*(\mathbf{E})\,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\,\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}An^*(\mathbf{F})) \arrow[d, "\mathrm{c}"] & \mathbf{E}\otimes\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \arrow[d, "\mathrm{c}"] \\
\mathsf{R}An_*(An^*(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})) \arrow[d] \arrow[dr] & \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E})\otimes An^*(\mathbf{F})) \arrow[d, "\sim"] & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F}) \arrow[d] \arrow[dl] \\
\mathsf{R}An_*(An^*(\mathbf{G})) \arrow[dr, "\sim"] & \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})) \arrow[d] & \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{G}) \arrow[dl, "\sim"'] \\
 & \mathsf{R}An_*\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}(An^*(\mathbf{G})). &
\end{tikzcd}$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

Corollaire 2.86. *Gardons les hypothèses du théorème* 2.85 *et supposons de plus que le morphisme* $\mathbf{E}\,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes\,\mathbf{F}\to\mathbf{G}$ *est une équivalence* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-locale stable. Alors, la composition de* (70) *est une équivalence* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-locale stable.*

Démonstration. En effet, par la proposition 2.7, le morphisme c_g dans (71) est inversible. □

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des T_k-spectres symétriques. On note

$$\mathrm{c}' : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})\otimes\mathbf{F}\to\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})$$

la transformation naturelle telle que $\tau\circ\mathrm{c}=\mathrm{c}'\circ\tau$, avec τ l'isomorphisme de permutation des facteurs, et de même pour $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}$. On dispose d'une transformation binaturelle

$$\mathrm{m} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E})\otimes\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F})\to\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}\otimes\mathbf{F})$$

donnée par la composition de

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \xrightarrow{\mathrm{c}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}\big(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{F}\big)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{c}'} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \xrightarrow{\mathrm{m}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}).$$

Le deuxième résultat important de cette section est le suivant.

Théorème 2.87. *On garde les hypothèses du théorème* 2.85*. La composition de*

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F})$$
$$\xrightarrow{\mathrm{m}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{G})$$

coïncide, dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$*, avec la composition de*

(72)
$$\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\mathbf{F}) \xrightarrow{\mathrm{m}} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E} \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathbf{F}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{G})$$

modulo les isomorphismes canoniques

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}), \quad \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}),$$
$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{G}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{G})$$

(cf. théorème 2.67 *et corollaire* 2.81*).*

Démonstration. Remarquons que la composition de (72) est égale à celle de

(73)
$$\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}) \xrightarrow[c_g]{(1)} \mathsf{Bti}_*(\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}))$$
$$\xrightarrow[\sim]{(2)} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathbf{F})$$
$$\xrightarrow[c_d]{(3)} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathsf{Bti}^*(\mathbf{F}))$$
$$\xrightarrow[\sim]{(4)} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{E} \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathbf{F})$$
$$\xrightarrow{(5)} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{G}) \xrightarrow{\delta} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{G}).$$

Par le théorème 2.85 et étant donné que $c_d = \tau \circ c_g \circ \tau$, le morphisme (5) $\circ$ (4) $\circ$ (3) coïncide avec le morphisme (6) égal à la composition de

$$\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathbf{F}) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{F})$$
$$\xrightarrow{\mathrm{c}'} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})) \to \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{G})).$$

En appliquant le théorème 2.85, cette fois pour les T_k-spectres symétriques $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{G})$, on déduit que le morphisme composé (6) $\circ$ (2) $\circ$ (1) coïncide avec la composition de

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \,{}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{F})$$
$$\xrightarrow{\mathrm{c}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}\big(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E}) \otimes \mathbf{F}\big)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{c}'} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})$$
$$\to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{G}).$$

On obtient maintenant le résultat recherché an appliquant le théorème 2.82 qui permet d'identifier le morphisme δ dans (73) avec le morphisme

$$\mathrm{m} : \mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty} \circ \mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty'}(\mathbf{G}) \to \mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}(\mathbf{G}). \qquad \square$$

2.3. Des complexes explicites qui calculent l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$. Comme avant, k est un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Dans la première section, on construit un complexe de formes différentielles qui calcule $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\mathbb{C})$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C})$. Ce complexe représente en fait l'algèbre des fonctions (au sens dérivé) sur le torseur des isomorphismes entre la réalisation de Betti et celle de de Rham. Après une section contenant des rappels sur les catégories de motifs avec transferts de Voevodsky, on construit des complexes de cycles qui représentent $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ pour un anneau de coefficients général Λ. On décrit aussi la multiplication et la comultiplication de ces bialgèbres à l'aide de ces complexes. Le théorème 2.67 et ses compléments, et, d'une manière générale, les constructions de la section 2.2, seront nos outils principaux tout au long de cette section.

2.3.1. Des complexes de formes différentielles. Par définition, $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$ est la réalisation de Betti du motif $\mathsf{Bti}_*^{\mathrm{eff}}(\Lambda)$, l'objet de $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$ qui représente la cohomologie de Betti. Lorsque $\Lambda = \mathbb{C}$, on peut utiliser le théorème de comparaison de Grothendieck entre cohomologie de Betti et cohomologie de de Rham algébrique pour obtenir un complexe de préfaisceaux particulièrement simple qui représente le motif $\mathsf{Bti}_*^{\mathrm{eff}}(\mathbb{C})$. Ce complexe sera ensuite utilisé pour obtenir une nouvelle description de l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\mathbb{C})$.

On commence par rappeler le théorème de comparaison de Grothendieck [20] sous une forme qui sera commode pour la suite. Comme avant, k désignera un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. On dispose d'un complexe de préfaisceaux de k-espaces vectoriels $\Omega^\bullet_{/k}$ sur Sm/k qui à un k-schéma lisse X, associe le complexe de de Rham algébrique $\Omega^\bullet_{/k}(X) = \Gamma(X, \Omega^\bullet_{X/k})$. Ce complexe est concentré en degrés cohomologiques positifs. Parallèlement, on dispose d'un complexe de préfaisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ sur CpVar qui à une variété analytique U associe le complexe de de Rham holomorphe $\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}(U) = \Gamma(U, \Omega^\bullet_U)$. Si X est un k-schéma lisse, on dispose d'une inclusion k-linéaire $\Omega_{/k}(X) \hookrightarrow \Omega_{/\mathrm{pt}}(X^{\mathrm{an}})$ qui est fonctorielle en X. Autrement dit, on dispose d'un morphisme de préfaisceaux de k-espaces vectoriels $\Omega^\bullet_{/k} \to An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$. On a alors le résultat suivant (cf. [14, §3.1]).

Proposition 2.88. (a) *Le complexe de préfaisceaux de k-espaces vectoriels $\Omega^\bullet_{/k}$ est $\mathbb{A}^1$-local.*

(b) *Le complexe de préfaisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ est $\mathbb{D}^1$-local et le morphisme $\mathbb{C}_{\mathrm{cst}} \to \Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ est une équivalence* usu-*locale. De plus, le morphisme $An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}} \to \mathsf{R}An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\mathbb{C})$.*

(c) *Le morphisme $\Omega^\bullet_{/k} \otimes_k \mathbb{C} \to An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ est une équivalence* Nis-*locale.*

Démonstration. Soient X un k-schéma de type fini et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent étendu au petit site étale de X en posant $\mathcal{M}(U) = \Gamma(U, u^*\mathcal{M})$ avec $u^*\mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_U$-module quasi-cohérent, image inverse de $\mathcal{M}$ suivant le morphisme structural $u : U \to X$ du X-schéma étale U. Si X est affine, $\mathrm{H}^i_{\mathrm{Nis}}(X,\mathcal{M})$ est nul pour $i \neq 0$. On en déduit aussitôt (en utilisant par exemple une suite spectrale) un isomorphisme naturel $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{/k}(X)) \simeq \mathrm{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, \Omega^\bullet_{/k})$ pour tout k-schéma affine et lisse X. Par ailleurs, soit $\Omega^\bullet_{/k} \to G$ une équivalence Nis-locale avec G un complexe de préfaisceaux Nis-fibrant. Par la discussion précédente, $\Omega^\bullet_{/k}(X) \to G(X)$ est un quasi-isomorphisme pour tout k-schéma affine et lisse X. Or, il est facile de voir que $\Omega^\bullet_{/k}(X) \to \Omega^\bullet_{/k}(\mathbb{A}^1_X)$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit aussitôt que $G \to \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}^1_k, G)$ est une équivalence Nis-locale entre deux complexes de préfaisceaux Nis-fibrants. C'est donc un quasi-isomorphisme de préfaisceaux. Ceci termine la preuve de (a).

Passons maintenant à (b). La propriété que $\mathbb{C}_{\mathrm{cst}} \to \Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ est une équivalence usu-locale découle immédiatement du lemme de Poincaré holomorphe, i.e., du fait que $\mathrm{H}^n(\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}(\mathbb{D}^r))$ (avec $r \in \mathbb{N}$) est nul pour $n > 0$ et isomorphe à $\mathbb{C}$ pour $n = 0$. Puisque $\mathbb{C}_{\mathrm{cst}}$ est $\mathbb{D}^1$-local, il en est de même de $\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$. Pour la dernière assertion de (b), on fixe une équivalence usu-locale $\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}} \to R$ avec R un complexe de préfaisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels usu-fibrants. Si U est une variété complexe de Stein, un argument similaire à celui utilisé ci-dessus montre que $\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}(U) \to R(U)$ est un quasi-isomorphisme. Puisque X^{an} est de Stein lorsque X est un k-schéma affine, le morphisme $An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}} \to An_*R$ est un quasi-isomorphisme au-dessus des k-schémas lisses affines. En particulier, c'est une équivalence Nis-locale.

La partie (c) est une reformulation du théorème de comparaison de Grothendieck [20]. On peut l'obtenir maintenant comme suit.[11)] Par (a) et (b), les complexes de préfaisceaux $\Omega^\bullet_{/k} \otimes_k \mathbb{C}$ et $An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}$ sont $\mathbb{A}^1$-locaux. Or, la catégorie $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \mathbb{C})$ est engendrée par les motifs des variétés projectives et lisses (cf. [4, proposition 2.2.27]). Ainsi, pour montrer (c), et compte tenu des isomorphismes

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, \Omega^\bullet_{/k}) \simeq \mathrm{H}^n_{\mathrm{Zar}}(X, \Omega^\bullet_{/k}) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^n_{\mathrm{Nis}}(X, An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}) \simeq \mathrm{H}^n_{\mathrm{usu}}(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}}),$$

il suffira de montrer que $\mathrm{H}^n_{\mathrm{Zar}}(X, \Omega^\bullet_{/k}) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{H}^n_{\mathrm{usu}}(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}})$ pour X projectif et lisse. Il s'agit alors du cas « élémentaire » du théorème de Grothendieck (cf. le dernier paragraphe de [20, p. 96]) qui découle du principe GAGA [43]. □

Corollaire 2.89. *Il existe un isomorphisme canonique* $\Omega^\bullet_{/k} \otimes_k \mathbb{C} \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbb{C})$ *dans* $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \mathbb{C})$.

Démonstration. Il s'agit de la composition de

$$\Omega^\bullet_{/k} \otimes_k \mathbb{C} \simeq An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}} \simeq \mathsf{R}An_*\Omega^\bullet_{/\mathrm{pt}} \simeq \mathsf{R}An_*(\mathbb{C}_{\mathrm{cst}}) \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*(\mathbb{C}). \qquad \square$$

Théorème 2.90. *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{\acute{e}t}}(\Omega^\bullet_{/k}) \otimes_k \mathbb{C} \simeq \mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{C})$ *dans* $\mathbf{D}(\mathbb{C})$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des corollaires 2.63 et 2.89. □

Rappelons que $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{\acute{e}t}}(\Omega^\bullet_{/k}) = \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(\Omega^\bullet_{/k}(\bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{\acute{e}t}})))$. Ce complexe calcule donc la cohomologie de de Rham du pro-k-schéma cocubique $\bar{\mathbb{D}}_{\mathrm{\acute{e}t}}$. (On reviendra plus en détail sur ce complexe.) Le résultat suivant décrit la multiplication de l'algèbre $\mathscr{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k, \sigma, \mathbb{C})$.

11) J'ai appris la démonstration présentée ici du théorème de comparaison de Grothendieck lors d'une discussion avec Joël Riou.

Proposition 2.91. *Le complexe* $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k})$ *est naturellement une algèbre. Sa multiplication envoie un couple* (β,δ) *avec* $\beta \in \Omega^m_{/k}(\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}})$ *et* $\delta \in \Omega^n_{/k}(\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}})$ *(m, n, p et q des entiers naturels) sur le pullback de la forme différentielle* $\beta \boxtimes \delta \in \Omega^{m+n}_{/k}(\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}})$ *suivant le morphisme* $\bar{\mathbb{D}}^{p+q}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}$*. De plus,* $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}) \otimes_k \mathbb{C} \simeq \mathscr{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C})$ *est un isomorphisme d'algèbres de* $\mathbf{D}(\mathbb{C})$*.*

Démonstration. En effet, $\Omega^{\bullet}_{/k}$ est naturellement une algèbre commutative dans la catégorie des complexes de préfaisceaux de k-espaces vectoriels sur Sm/k. Sa multiplication associe à deux formes différentielles algébriques ω et ω' sur un k-schéma lisse X leur produit extérieur $\omega \wedge \omega'$. De même, $\Omega^{\bullet}_{/\text{pt}}$ est naturellement une algèbre commutative dans la catégorie des complexes de préfaisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur CpVar et sa multiplication est aussi donnée par le produit extérieur des formes différentielles. On en déduit aussitôt que l'isomorphisme $\Omega^{\bullet}_{/k} \otimes_k \mathbb{C} \simeq \mathsf{Bti}^{\text{eff}}_*(\mathbb{C})$ du corollaire 2.89 est un isomorphisme d'algèbres de $\mathbf{DA}^{\text{eff}}(k,\mathbb{C})$. On conclut à l'aide de la proposition 2.83. □

On a aussi une variante stable du théorème 2.90. Notons U le complémentaire de la diagonale de $\mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k$. C'est un k-schéma affine et la projection sur le second facteur $U \to \mathbb{P}^1_k$ est localement isomorphe à la projection de la droite affine relative $\mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$. En particulier, $U \otimes \Lambda \to \mathbb{P}^1_k \otimes \Lambda$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-locale. Si $u \in U$ est un point rationnel au-dessus de $\infty \in \mathbb{P}^1_k$, on peut prendre $T_k = (U,u) \otimes \Lambda$ comme modèle du motif de Tate (au lieu de $T_k = (\mathbb{P}^1_k, \infty) \otimes \Lambda$). On peut donc utiliser la catégorie des $[(U,u) \otimes -]$-spectres (symétriques ou non symétriques) pour définir la catégorie $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$. De plus, un $[(\mathbb{P}^1_k,\infty) \otimes -]$-spectre $\mathbf{E}$ est naturellement un $[(U,u) \otimes -]$-spectre ayant comme morphismes d'assemblages les compositions de $(U,u) \otimes \mathbf{E}_n \to (\mathbb{P}^1_k,\infty) \otimes \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$.

On a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{H}^2_{\text{Zar}}(\mathbb{P}^1_k, \Omega^{\bullet}_{/k}) \simeq \mathrm{H}^2_{\text{Zar}}(U, \Omega^{\bullet}_{/k}) \simeq \mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet}_{/k}(U)).$$

Il vient que $\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet}_{/k}(U))$ est un k-espace vectoriel de dimension 1. On fixe $\hat{\alpha} \in \Omega^2_{/k}(U)$ une forme différentielle dont la classe d'homologie est une base de $\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet}_{/k}(U))$. Clairement $\hat{\alpha}$ est un élément de $\Omega^2_{/k}(U,u)$. On note $\mathbf{\Omega}_{/k}$ le $[(U,u) \otimes -]$-spectre (non symétrique) donné au niveau n par le complexe $\Omega^{\bullet}_{/k}[2n]$ et par le morphisme d'assemblage

$$(U,u) \otimes \Omega^{\bullet}_{/k}[2n] \to \Omega^{\bullet}_{/k}[2+2n]$$

correspondant par adjonction au morphisme

$$\Omega^{\bullet}_{/k}[2n] \to \underline{\mathrm{hom}}((U,u), \Omega^{\bullet}_{/k}[2])[2n]$$

qui à une forme différentielle $\omega \in \Omega^r_{/k}(X)$ (de degré $r \in \mathbb{N}$ sur un k-schéma lisse X) associe la forme différentielle $\hat{\alpha} \boxtimes \omega \in \Omega^{2+r}_{/k}((U,u) \times_k X)$. On a le résultat suivant.

Proposition 2.92. *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathbf{\Omega}_{/k} \otimes_k \mathbb{C} \simeq \mathsf{Bti}_*(\mathbb{C})$ *dans* $\mathbf{DA}(k,\mathbb{C})$*.*

Démonstration. En effet, on dispose de l'analogue analytique $\mathbf{\Omega}_{/\text{pt}}$ de $\mathbf{\Omega}_{/k}$. C'est un $[(U^{\text{an}},u) \otimes -]$-spectre en complexes de préfaisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur CpVar. En niveau $n \in \mathbb{N}$, il est donné par $\Omega^{\bullet}_{/\mathrm{pt}}[2n]$ et ses morphismes d'assemblages sont induits par $\hat{\alpha}$ vue comme une forme différentielle holomorphe sur U^{an} (à l'aide du plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$). De plus, le morphisme évident $\mathbb{C}_{\mathrm{cst}} \to \Omega^{\bullet}_{/\mathrm{pt}} = \mathrm{Ev}_0(\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}})$ induit par adjonction un morphisme $\mathrm{Sus}^0_T(\mathbb{C}_{\mathrm{cst}}) = ((U,u)^{\wedge n} \otimes \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}} \to \mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}}$. En utilisant la proposition 2.88 (b), on voit que ce morphisme est une équivalence $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$-locale niveau par niveau. Sa source étant un Ω-spectre, il en est de même de $\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}}$, et en utilisant la dernière assertion de la proposition 2.88 (b), on voit que le morphisme évident $An_*\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}} \to \mathsf{R}An_*\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}}$ est un isomorphisme de $\mathbf{DA}(k,\mathbb{C})$. Par ailleurs, on a un morphisme évident $\mathbf{\Omega}_{/k} \to An_*\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}}$ qui est une équivalence Nis-locale niveau par niveau par la proposition 2.88 (c). On obtient en fin de compte une chaîne d'isomorphismes $\mathbf{\Omega}_{/k} \otimes_k \mathbb{C} \simeq An_*\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}} \simeq \mathsf{R}An_*\mathbf{\Omega}_{/\mathrm{pt}} \simeq \mathsf{R}An_*\,\mathrm{Sus}^0_T(\mathbb{C}_{\mathrm{cst}}) = \mathsf{Bti}_*(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{DA}(k,\mathbb{C})$. □

Soit $\bar{\pi} \in \mathrm{H}_0(\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}))$ l'image de $\alpha \in \mathrm{H}_2(\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}((\mathbb{P}^1_k,\infty)\otimes k))$ par la composition du zigzag

$$\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}((\mathbb{P}^1_k,\infty)\otimes k) \xleftarrow{\text{q.-iso.}} \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}((U,u)\otimes k) \xrightarrow{\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\hat{\alpha})} \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}[2]).$$

On fixe $\pi \in (\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}))_0$ un représentant de la classe d'homologie $\bar{\pi}$.

Théorème 2.93. *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C}) \simeq \mathsf{Bti}^*(\mathbf{\Omega}_{/k})\otimes_k\mathbb{C}$ *dans* $\mathbf{D}(\mathbb{C})$*. De plus,* $\mathsf{Bti}^*(\mathbf{\Omega}_{/k})$ *est canoniquement isomorphe dans* $\mathbf{D}(k)$ *à la colimite homotopique de la suite*

$$\big(\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}) \xrightarrow{\pi\times-} \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}) \xrightarrow{\pi\times-} \cdots \to \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k}) \xrightarrow{\pi\times-} \cdots\big).$$

Démonstration. La première partie découle de la proposition 2.92. La seconde partie découle du lemme 2.15. □

Dans le reste de la section on cherchera à simplifier, à quasi-isomorphismes près, les complexes $\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^{\bullet}_{/k})$. Notre méthode peut se formaliser à l'aide de la notion de $\mathrm{W}(k)$-module cubique introduite ci-dessous.

Rappelons que l'algèbre de Weyl de degré $n \in \mathbb{N}$, notée $\mathrm{W}_n(k)$, est l'algèbre (associative) librement engendrée par les $2n$ variables $\mu_1,\ldots,\mu_n$ et $\partial_1,\ldots,\partial_n$ satisfaisant aux relations suivantes : $[\mu_i,\mu_j] = [\partial_i,\partial_j] = 0$ et $[\partial_j,\mu_i] = \delta_{ij}\cdot 1$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) pour tout $1 \leq i,\ j \leq n$.

Définition 2.94. Un $\mathrm{W}(k)$-*module cubique* (resp. enrichi, Σ-enrichi) M consiste en

- un objet cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) M de la catégorie des k-espaces vectoriels,
- une action de $\mathrm{W}_n(k)$ sur $M(\underline{\mathbf{1}}^n)$ qui en fait un $\mathrm{W}_n(k)$-module à gauche, pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Ces données satisfont aux conditions ci-dessous.

(i) Pour $n \in \mathbb{N}$, $i \in [\![1,n]\!]$ et $\epsilon \in \{0,1\}$, le morphisme $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon} : M(\underline{\mathbf{1}}^n) \to M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1})$ vérifie les formules suivantes :

$$\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\mu_i m) = \epsilon\, \mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m), \quad \mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\mu_j m) = \begin{cases} \mu_j \mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m) & \text{si } j \le i-1, \\ \mu_{j-1}\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m) & \text{si } j \ge i+1, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\partial_j m) = \begin{cases} \partial_j \mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m) & \text{si } j \le i-1, \\ \partial_{j-1}\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m) & \text{si } j \ge i+1, \end{cases}$$

pour tout $m \in M(\underline{\mathbf{1}}^n)$.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n]\!]$, le morphisme $\mathrm{p}^*_i : M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1}) \to M(\underline{\mathbf{1}}^n)$ vérifie les formules suivantes :

$$\partial_i\, \mathrm{p}^*_i(m) = 0, \quad \mu_j\, \mathrm{p}^*_i(m) = \begin{cases} \mathrm{p}^*_i(\mu_j m) & \text{si } j \le i-1, \\ \mathrm{p}^*_i(\mu_{j-1} m) & \text{si } j \ge i+1, \end{cases}$$

$$\partial_j\, \mathrm{p}^*_i(m) = \begin{cases} \mathrm{p}^*_i(\partial_j m) & \text{si } j \le i-1, \\ \mathrm{p}^*_i(\partial_{j-1} m) & \text{si } j \ge i+1, \end{cases}$$

pour tout $m \in M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1})$.

Selon qu'il s'agisse d'un $\mathrm{W}(k)$-module cubique enrichi ou Σ-enrichi, ces données satisfont aussi à la première condition ou aux deux conditions ci-dessous.

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n-1]\!]$, le morphisme $\mathrm{m}^*_i : M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1}) \to M(\underline{\mathbf{1}}^n)$ vérifie les formules suivantes :

$$\mathrm{m}^*_i(\mu_i m) = \mu_i \mu_{i+1}\, \mathrm{m}^*_i(m), \quad \partial_i\, \mathrm{m}^*_i(m) = \mu_{i+1}\, \mathrm{m}^*_i(\partial_i m),$$
$$\partial_{i+1}\, \mathrm{m}^*_i(m) = \mu_i\, \mathrm{m}^*_i(\partial_i m),$$

$$\mathrm{m}^*_i(\mu_k m) = \begin{cases} \mu_k\, \mathrm{m}^*_i(m) & \text{si } k \le i-1, \\ \mu_{k+1}\, \mathrm{m}^*_i(m) & \text{si } k \ge i+1, \end{cases}$$

$$\mathrm{m}^*_i(\partial_k m) = \begin{cases} \partial_k\, \mathrm{m}^*_i(m) & \text{si } k \le i-1, \\ \partial_{k+1}\, \mathrm{m}^*_i(m) & \text{si } k \ge i+1, \end{cases}$$

pour tout $m \in M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1})$.

(iv) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \Sigma_n$, le morphisme $\sigma^* : M(\underline{\mathbf{1}}^n) \to M(\underline{\mathbf{1}}^n)$ vérifie les formules suivantes :

$$\sigma^*(\mu_j m) = \mu_{\sigma^{-1}(j)}\sigma^*(m) \quad \text{et} \quad \sigma^*(\partial_j m) = \partial_{\sigma^{-1}(j)}\sigma^*(m)$$

pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et $m \in M(\underline{\mathbf{1}}^n)$.

Exemple 2.95. Un exemple fondamental de $\mathrm{W}(k)$-module cubique Σ-enrichi est $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})$. Il est donné en degré n par l'algèbre $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}})$ des fonctions sur le pro-k-schéma $\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}}$. Cette algèbre étant une union filtrante de $k[t_1,\ldots,t_n]$-algèbres étales, elle admet une action de l'algèbre de Weyl $\mathrm{W}_n(k)$ telle que μ_i opère par la multiplication par t_i et ∂_i opère par la dérivation par rapport à t_i. Toutes les propriétés (i) à (iv) sont immédiates.

Les $\mathrm{W}(k)$-modules cubiques (resp. enrichis, Σ-enrichis) forment une catégorie abélienne. En particulier, on peut parler de complexes de $\mathrm{W}(k)$-modules cubiques (resp. enrichis, Σ-enrichis). Plus généralement, il est facile de donner un sens à la notion de $\mathrm{W}(k)$-objet cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) à valeurs dans une catégorie additive k-linéaire abstraite.

Soit M un $\mathrm{W}(k)$-module cubique. On définit un objet cubique (resp. enrichis, Σ-enrichis) $\Omega^{\bullet}(M)$ de la catégorie des complexes de k-espaces vectoriels de la manière suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n))$ est nul pour $d \notin [\![0,n]\!]$ et il est donné sinon par

$$\Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n} M(\underline{\mathbf{1}}^n)\, \mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}. \tag{74}$$

La différentielle $\mathrm{d} : \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to \Omega^{d+1}(M(\underline{\mathbf{1}}^n))$ est celle de de Rham. Elle envoie $m\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}$ sur $\sum_{j=1}^n (\partial_j m)\,\mathrm{d}t_j \wedge \mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}$ que l'on voit comme un élément de (74) en utilisant la règle de signe habituelle pour les produits extérieurs. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on définit $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon} : \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1}))$ en posant

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}) \\
&\qquad = \begin{cases} \mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(m)\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_s} \wedge \mathrm{d}t_{i_{s+1}-1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d-1} & \text{si } i_s < i < i_{s+1}, \\ 0 & \text{si } i_s = i. \end{cases}
\end{aligned}$$

(Ci-dessus, $s \in [\![1,d]\!]$ est le plus grand entier tel que $i_s \leq i$.) Il est alors immédiat que $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}$, ainsi définie, commute à la différentielle de de Rham. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on définit

$$\mathrm{p}^*_i : \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1})) \to \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n))$$

en posant

$$\mathrm{p}^*_i(m\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}) = \mathrm{p}^*_i(m)\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_t} \wedge \mathrm{d}t_{i_{t+1}+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d+1}$$

avec $t \in [\![1,d]\!]$ le plus grand entier tel que $i_t < i$.

Si M est un $\mathrm{W}(k)$-module cubique enrichi (resp. Σ-enrichi), il en est de même de l'objet cubique $\Omega^{\bullet}(M)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,n-1]\!]$, le morphisme

$$\mathrm{m}^*_i : \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1})) \to \Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n))$$

est donné par

$$\begin{aligned}
&\mathrm{m}^*_i(m\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}) \\
&= \begin{cases} \mathrm{m}^*_i(m)\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_s} \wedge \mathrm{d}t_{i_{s+1}+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d+1} & \text{si } i_s < i < i_{s+1}, \\ t_{i_s}\,\mathrm{m}^*_i(m)\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_{s-1}} \wedge \mathrm{d}t_{i_s+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d+1} & \\ \quad + t_{i_s+1}\,\mathrm{m}^*_i(m)\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_s} \wedge \mathrm{d}t_{i_{s+1}+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d+1} & \text{si } i_s = i. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le cas respé, l'automorphisme σ^* de $\Omega^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n))$ (avec $\sigma \in \Sigma_n$) est donné par

$$\sigma^*(m\,\mathrm{d}t_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{i_d}) = \sigma^*(m)\,\mathrm{d}t_{\sigma^{-1}(i_1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{\sigma^{-1}(i_d)}.$$

Exemple 2.96. L'objet cubique Σ-enrichi en complexes de k-espaces vectoriels $\Omega^\bullet(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ s'identifie canoniquement à $\Omega^\bullet_{/k}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega^\bullet_{/k}) = \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(\Omega^\bullet(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})))).$$

Ceci motive la définition qui suit.

Définition 2.97. Soit M un $\mathrm{W}(k)$-module cubique. On note $\mathrm{DR}_\bullet(M)$ le complexe $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(\Omega^\bullet(M)))$. C'est le complexe de de Rham de M.

Supposons maintenant que M est un $\mathrm{W}(k)$-module cubique enrichi. Il est utile dans le suite de considérer une variante « normalisée » du complexe de de Rham de M. Ainsi, on notera ${}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}_\bullet(M)$ le complexe obtenu en utilisant le complexe normalisé ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}(-)$ au lieu du complexe simple $\mathrm{C}(-)$ dans la définition 2.97. C'est le complexe total associé au bicomplexe suivant :

(75)

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "(-1)^{n+2}\mathrm{d}^*_{n+2,1}"] & & \vdots \arrow[d, "(-)^{n+2}\mathrm{d}^*_{n+2,1}"] & \vdots \arrow[d, "(-)^{n+2}\mathrm{d}^*_{n+2,1}"] & \vdots \arrow[d, "(-)^{n+2}\mathrm{d}^*_{n+2,1}"] & \\
{}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}\Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "(-1)^{n+1}\mathrm{d}^*_{n+1,1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}\Omega^{n-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "(-1)^{n+1}\mathrm{d}^*_{n+1,1}"] & {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}\Omega^{n}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "(-1)^{n+1}\mathrm{d}^*_{n+1,1}"] & {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}\Omega^{n+1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
{}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n}\Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "(-1)^{n}\mathrm{d}^*_{n,1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n}\Omega^{n-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{n}\mathrm{d}^*_{n,1}"] & {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n}\Omega^{n}(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
{}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n-1}\Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "(-1)^{n-1}\mathrm{d}^*_{n-1,1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n-1}\Omega^{n-1}(M) \arrow[r] & 0 & & \\
\vdots & & & & &
\end{tikzcd}$$

concentré en degrés homologiques $(-d, n)$ tels que $0 \leq d \leq n$. Rappelons que ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_n\Omega^d(M) \subset \Omega^d(M(\underline{1}^n))$ est l'intersection des noyaux des $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}$ pour $(i,\epsilon) \neq (n,1)$. Par la proposition A.11, l'inclusion ${}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}_\bullet(M) \hookrightarrow \mathrm{DR}_\bullet(M)$ est un quasi-isomorphisme.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons ${}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}^{\leq n}(M)$ le complexe simple associé à la troncation verticale bête $\sigma^v_{\leq n}({}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(\Omega^\bullet(M)))$ du bicomplexe (75). (Précisons que $\sigma^v_{\leq n}({}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(\Omega^\bullet(M)))$ est le sous-bicomplexe de ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(\Omega^\bullet(M))$ obtenu en remplaçant les lignes ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_p(\Omega^\bullet(M))$, pour $p \geq n+1$, par des complexes nuls.) Clairement, les ${}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}^{\leq n}(M)$ forment une filtration croissante et exhaustive de ${}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}(M)$. En particulier, on a ${}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}(M) = \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, {}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}^{\leq n}(M)$.

Pour n, $d \in \mathbb{N}$, on note $\widetilde{\Omega}^d(M(\underline{1}^n)) \subset \Omega^d(M(\underline{1}^n))$ le sous-k-espace vectoriel égal à l'intersection des noyaux des $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}$ pour tout $(i,\epsilon) \in [\![1,n]\!] \times \{0,1\}$. Alors, $\widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{1}^n))$ est un sous-complexe de $\Omega^\bullet(M(\underline{1}^n))$. Il s'identifie en fait au noyau de la différentielle verticale partant de la n-ième ligne dans le bicomplexe (75). On en déduit par passage aux complexes totaux un morphisme

(76)
$$\widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{1}^n))[n]^+ \to {}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}^{\leq n}(M).$$

(Rappelons que $(-)[m]^+$ est le foncteur de translation sur les complexes qui ne modifie pas le signe de la différentielle.) On a le résultat suivant.

Lemme 2.98. (a) *Le morphisme de complexes* (76) *est un quasi-isomorphisme.*

(b) *Le morphisme de complexes*

$$(-1)^n\, \mathrm{p}_{n+1}^*(-) \wedge \mathrm{d}t_{n+1} : \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^n))[n]^+ \to \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1}))[n+1]^+$$

rend commutatif, dans $\mathbf{D}(k)$*, le carré suivant*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^n))[n]^+ & \longrightarrow & \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1}))[n+1]^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}^{\leq n}(M) & \longrightarrow & {}^{\mathrm{nd}}\mathrm{DR}^{\leq n+1}(M). \end{array}$$

Démonstration. Par [47, Lemma 2.7.3] et compte tenu du fait que $\sigma^v_{\leq n}({}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(\Omega^\bullet(M)))$ est homologiquement borné inférieurement, il suffit de montrer que le morphisme

$$\widetilde{\Omega}^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n))[n] \hookrightarrow \sigma_{\leq n}({}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(\Omega^d(M)))$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $d \in \mathbb{N}$. Étant donné que $\widetilde{\Omega}^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n))$ est le noyau de la différentielle $(-1)^n \mathrm{d}^*_{n,1} : {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_n(\Omega^d(M)) \to {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n-1}(\Omega^d(M))$, il reste à voir que l'homologie du complexe $\sigma_{\leq n}({}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(\Omega^d(M)))$ est nulle en degrés $0 \leq p \leq n-1$. Or, si $\beta \in {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_p(\Omega^d(M))$ est un cycle, i.e., un élément de $\widetilde{\Omega}^d(M(\underline{\mathbf{1}}^p))$, alors $\gamma = (-1)^{n+1}\mu_{n+1}\, \mathrm{p}^*_{n+1}(\beta)$ est un élément de ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{p+1}(\Omega^d(M))$ et $(-1)^{n+1}\mathrm{d}^*_{n+1,1}(\gamma) = \beta$. Ceci termine la preuve de (a).

Pour (b), on remarque qu'on a une suite exacte courte de complexes

$$0 \to \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1})) \to {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}(\Omega^\bullet(M)) \xrightarrow{u} \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to 0$$

avec $u = (-1)^{n+1}\mathrm{d}^*_{n+1,1}$. On en déduit un morphisme $\delta : \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1}))[1]^+$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}(k)$ donné par le zigzag

$$\widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to \mathrm{Cône}^+(u) \xleftarrow{\text{q.-iso.}} \widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1}))[1]^+.$$

Contrairement au cône de Verdier (cf. [45, (3.1.2.1)]), le foncteur Cône$^+$ ci-dessus associe à un morphisme de complexes $f : A_\bullet \to B_\bullet$ le complexe donné en degré n par $B_n \oplus A_{n-1}$ et ayant

$$\begin{pmatrix} d_n^B & (-1)^{n-1} f_{n-1} \\ 0 & d^A_{n-1} \end{pmatrix}$$

pour différentielle. Il est facile de voir que le morphisme δ rend commutatif le carré de l'énoncé. Il reste donc à voir que δ coïncide avec le morphisme décrit dans (b). Un calcul facile montre que la famille des morphismes

$$\begin{aligned}(0, (-1)^{n+1+d}\mu_{n+1}\, \mathrm{p}^*_{n+1}(-)) : \widetilde{\Omega}^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to \widetilde{\Omega}^{d-1}(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \oplus {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}(\widetilde{\Omega}^d(M)) \\ = \mathrm{Cône}^+(u)^{d-1}\end{aligned}$$

fournit une homotopie entre l'inclusion évidente $\widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \hookrightarrow \mathrm{Cône}^+(u)$ et le morphisme donné en degré d par

$$\begin{aligned}(0, (-1)^n\, \mathrm{p}_{n+1}^*(-) \wedge \mathrm{d}t_{n+1}) : \widetilde{\Omega}^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) &\to \widetilde{\Omega}^d(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \oplus {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n+1}(\widetilde{\Omega}^{d+1}(M)) \\ &= \mathrm{Cône}^+(u)^d.\end{aligned}$$

Or, l'image de ce dernier est contenue dans le sous-complexe $\widetilde{\Omega}^\bullet(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1}))[1]^+ \subset \mathrm{Cône}^+(u)$. Ceci permet de conclure. □

Définition 2.99. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note par $\widetilde{\Omega}^{\infty-d}(M)$ la colimite de la $\mathbb{N}$-suite $(\widetilde{\Omega}^{n-d}(M(\underline{\mathbf{1}}^n)))_{n\in\mathbb{N}}$ où les morphismes de transition (pour $n \geq d$) sont donnés par

$$\mathrm{p}_{n+1}^*(-) \wedge \mathrm{d}t_{n+1} : \widetilde{\Omega}^{n-d}(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) \to \widetilde{\Omega}^{n+1-d}(M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1})).$$

La différentielle de de Rham induit un morphisme $\mathrm{d} : \widetilde{\Omega}^{\infty-d}(M) \to \widetilde{\Omega}^{\infty-(d-1)}(M)$. On obtient ainsi un complexe concentré en degrés homologiques positifs

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \widetilde{\Omega}^{\infty-d}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \widetilde{\Omega}^{\infty-2}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \widetilde{\Omega}^{\infty-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \widetilde{\Omega}^{\infty}(M) \to 0 \to \cdots.$$

Le complexe $\widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}(M)$ est appelé le complexe de de Rham normalisé associé au $\mathrm{W}(k)$-module cubique enrichi M.

Proposition 2.100. *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathrm{DR}_\bullet(M) \simeq \widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}(M)$ *dans* $\mathbf{D}(k)$.

Démonstration. Par le lemme 2.98, $\mathrm{DR}_\bullet(M)$ est isomorphe à la colimite homotopique de $\mathcal{E}' = (\widetilde{\Omega}^{n-\bullet}(M(\underline{\mathbf{1}}^n)))_{n\in\mathbb{N}}$ dont le n-ième morphisme de transition est $(-1)^n$ fois celui de la $\mathbb{N}$-suite $\mathcal{E}$ de la définition 2.99. Or, les morphismes $((-1)^n\, \mathrm{id})_{n\in\mathbb{N}}$ définissent un isomorphisme entre les $\mathbb{N}$-suites $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. □

Remarque 2.101. On note $M(\underline{\mathbf{1}}^\infty)$ la colimite de la $\mathbb{N}$-suite $(M(\underline{\mathbf{1}}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour morphismes de transition les $\mathrm{p}_{n+1}^* : M(\underline{\mathbf{1}}^n) \to M(\underline{\mathbf{1}}^{n+1})$. C'est naturellement un module à gauche sur $\mathrm{W}_\infty(k) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_n(k)$. Étant donné un sous-ensemble fini $I \subset \mathbb{N} - \{0\}$, on définit un sous-espace vectoriel $M^{(I)}(\underline{\mathbf{1}}^\infty) \subset M(\underline{\mathbf{1}}^\infty)$ par la colimite suivant les $n \geq \max(I)$ des $M^{(I)}(\underline{\mathbf{1}}^n) = \bigcap_{i\in I,\, \epsilon\in\{0,1\}} \ker\{\mathrm{d}_{i,\epsilon}^* : M(\underline{\mathbf{1}}^n) \to M(\underline{\mathbf{1}}^{n-1})\}$. Clairement, pour $0 \leq d \leq n$, on a une décomposition en somme directe : $\widetilde{\Omega}^{n-d}(M(\underline{\mathbf{1}}^n)) = \bigoplus_{I\subset[\![1,n]\!],\, \mathrm{card}(I)=d} M^{(I)}(\underline{\mathbf{1}}^n)\, \mathrm{d}\hat{t}_I$, où $\mathrm{d}\hat{t}_I = \mathrm{d}t_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_{j_{n-d}}$ avec $[\![1,n]\!] - I = \{t_{j_1} < \cdots < t_{j_{n-d}}\}$. Par passage à la colimite, on déduit une décomposition en somme directe :

$$\widetilde{\Omega}^{\infty-d}(M) = \bigoplus_{I\subset\mathbb{N}-\{0\},\, \mathrm{card}(I)=d} M^{(I)}(\underline{\mathbf{1}}^\infty)\, \mathrm{d}\hat{t}_I.$$

La différentielle $\mathrm{d} : \widetilde{\Omega}^{\infty-d}(M) \to \widetilde{\Omega}^{\infty-(d-1)}(M)$ envoie $\omega \in M^{(I)}(\underline{\mathbf{1}}^\infty)\, \mathrm{d}\hat{t}_I$ sur

$$\sum_{i\in I} (-1)^{\mathrm{card}([\![1,i-1]\!]-I)} (\partial_i \omega)\, \mathrm{d}\hat{t}_{I-\{i\}}.$$

Nous terminons la section en explicitant la proposition 2.100 dans le cas qui nous intéresse, à savoir $M = \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})$, et en donnant quelques compléments. Rappelons que $\mathcal{A}_n = \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ est l'ensemble des séries entières $f = \sum_{\underline{\nu}\in\mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} t^{\underline{\nu}}$ de rayon de convergence strictement plus grand que 1. On a le fait suivant.

Proposition 2.102. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n_{\text{ét}})$ s'identifie naturellement à la sous-algèbre $\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^n) \subset \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ formée des séries entières f qui sont algèbriques sur le corps des fractions rationnelles $k(t_1,\dots,t_n)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ une série entière algébrique sur $k(t_1,\dots,t_n)$. Il s'agit de montrer qu'il existe une sous-$k[t_1,\dots,t_n]$-algèbre étale de $\mathcal{A}_n$ contenant f. On utilise le théorème de Popescu [37,38] et [44, Theorem 10.1] pour trouver une sous-$k[t_1,\dots,t_n]$-algèbre lisse de $\mathcal{A}_n$ contenant f et on conclut à l'aide du lemme 2.103 ci-dessous. □

Lemme 2.103. *Soient A un anneau régulier intègre et B une A-algèbre lisse. On note $B^{\text{alg}} \subset B$ le sous-ensemble des éléments algébriques sur* $\text{Frac}(A)$*, i.e., zéros de polynômes unitaires à coefficients dans* $\text{Frac}(A)$*. Alors B^{alg} est une A-algèbre étale.*

Démonstration. Il est facile de voir que si A' est une A-algèbre étale, alors le morphisme évident $A' \otimes_A B^{\text{alg}} \to (A' \otimes_A B)^{\text{alg}}$ est inversible. Autrement dit, le problème est local pour la topologie étale. On peut donc supposer que l'anneau A est strictement hensélien et on raisonne par récurrence sur sa dimension. L'hypothèse de récurrence entraîne que la $A^{\text{hs}}_{\mathfrak{p}}$-algèbre $A^{\text{hs}}_{\mathfrak{p}} \otimes_A B^{\text{alg}}$ est étale pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ différent de l'idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$. (Ici, $A^{\text{hs}}_{\mathfrak{p}}$ est un hensélisé strict de A en $\mathfrak{p}$.) On en déduit que B^{alg} est étale au-dessus de l'ouvert $\text{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}\}$.

On ne restreint pas la généralité en supposant que B est intègre. Il en est alors de même de B^{alg}. D'autre part, si l'image de $\text{Spec}(B^{\text{alg}}) \to \text{Spec}(A)$ est contenue dans $\text{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}\}$, il n'y a rien à montrer. On supposera donc que $\text{Spec}(B^{\text{alg}}) \to \text{Spec}(A)$ est surjectif. Ce morphisme étant quasi-fini (ou au pis quasi-entier) et A étant strictement hensélien, on déduit que B^{alg} est une A-algèbre finie (ou au pis une union filtrante de A-algèbres finies). Par le théorème de pureté de Nagata–Zariski [36], et en se rappelant que B^{alg} est étale sur le complémentaire de $\{\mathfrak{m}\}$, la A-algèbre B^{alg} est étale à moins que A soit de dimension plus petite que 1, i.e., A est un corps (séparablement clos) ou un anneau de valuation discrète (strictement hensélien). Lorsque A est un corps, le résultat est clair. Supposons donc que A est un anneau de valuation discrète et soit π un générateur de $\mathfrak{m}$, i.e., une uniformisante. Alors, forcément, $\text{Spec}(B) \to \text{Spec}(A)$ est surjectif. En effet, le contraire entraînerait que B est une $A[\pi^{-1}]$-algèbre et il en serait de même de B^{alg}, ce qu'on a exclu. Mais vu que A est strictement hensélien et que B est lisse sur A, il existe une rétraction $B \to A$. Cela implique que B^{alg} est une A-algèbre finie, intègre et que l'inclusion $A \hookrightarrow B^{\text{alg}}$ admet une rétraction. Ceci ne peut se produire que lorsque $A = B^{\text{alg}}$. Le lemme est maintenant démontré. □

Notons $\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^\infty)$ la colimite de la $\mathbb{N}$-suite $(\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour morphismes de transition les inclusions évidentes $\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^n) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{n+1})$ qui consistent à voir une série entière en $(t_1,\dots,t_n)$ comme une série entière en $(t_1,\dots,t_n,t_{n+1})$ indépendante de la variable t_{n+1}. Alors, $\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^\infty)$ formée des séries entières en les variables $(t_i)_{i\in\mathbb{N}-\{0\}}$ ne dépendant que d'un nombre fini de ces variables et ayant un rayon de convergence strictement plus grand que 1. Étant donnée une partie finie $I \subset \mathbb{N} - \{0\}$, on note $\mathcal{O}^{(I)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ et $\mathcal{O}^{(I)}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ et $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ formés des séries entières qui deviennent nulles en substituant les variables t_i par $\epsilon \in \{0,1\}$ pour tout $i \in I$. Avec ces notations, on peut énoncer le théorème principal de cette section, qui découle aussitôt du théorème 2.90 et de la proposition 2.100.

Théorème 2.104. *Il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) \otimes_k \mathbb{C}$ où $\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) = \widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ est le complexe ci-dessous concentré en degrés homologiques positifs :*

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \bigoplus_{\substack{I\subset \mathbb{N}-\{0\},\\ \mathrm{card}(I)=d}} \mathcal{O}^{(I)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\,\mathrm{d}\hat{t}_I \xrightarrow{\mathrm{d}} \bigoplus_{\substack{I\subset \mathbb{N}-\{0\},\\ \mathrm{card}(I)=d-1}} \mathcal{O}^{(I)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\,\mathrm{d}\hat{t}_I$$
$$\xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \bigoplus_{i\subset \mathbb{N}-\{0\}} \mathcal{O}^{(i)}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\,\mathrm{d}\hat{t}_i \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})\mathrm{d}\hat{t}_{\emptyset}.$$

La différentielle de $\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma)$ est celle de de Rham. Elle est donnée par

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}\hat{t}_I) = \sum_{i\in I}(-1)^{\mathrm{card}([\![1,i-1]\!]-I)}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right)\mathrm{d}\hat{t}_{I-\{i\}}.$$

Voici une conséquence importante du théorème 2.104.

Corollaire 2.105. *Les complexes $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ sont (-1)-connexes, i.e., leur homologie est nulle en degrés strictement négatifs.*

Démonstration. Par les théorèmes 2.14 et 2.16, il suffit de traiter le cas de $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Z})$. En utilisant [8, théorème 1.25 et corollaire 1.27], on se ramène à traiter le cas de $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$. Par le théorème 2.104, on a un isomorphisme $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathcal{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) \otimes_k \mathbb{C}$ dans $\mathbf{D}(\mathbb{C})$ et le complexe $\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma)$ est (-1)-connexe. □

Par le corollaire 2.105, les structures de bialgèbres de $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ passent à l'homologie en degré zéro. Les bialgèbres (de la catégorie des Λ-modules) ainsi obtenues seront notées $\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ respectivement. $\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ est même une algèbre de Hopf, qu'on obtient à partir de $\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ en inversant un élément $\varsigma \in \mathbf{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ par le théorème 2.14.

Définition 2.106. On pose $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) = \mathrm{Spec}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda))$. C'est un pro-schéma en groupe au-dessus de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ qu'on appellera le *groupe de Galois motivique* du corps k associé au plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Remarque 2.107. Posons aussi $\mathbf{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) = \mathrm{H}_0(\mathcal{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma))$. C'est une k-algèbre commutative et on a un isomorphisme d'algèbres $\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) \otimes_k \mathbb{C}$. En posant $\mathbf{P}(k,\sigma) = \mathbf{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma)[\bar{\pi}^{-1}]$ (cf. théorème 2.93), on a également un isomorphisme de k-algèbres $\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C}) \simeq \mathbf{P}(k,\sigma) \otimes_k \mathbb{C}$. Le pro-$k$-schéma $\mathrm{Spec}(\mathbf{P}(k,\sigma))$ est important d'un point de vue conceptuel. En effet, il correspond au k-torseur sous $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\mathbb{Q})$ des isomorphismes de comparaison de la cohomologie de de Rham vers la cohomologie de Betti. On laissera au lecteur le soin de donner un sens précis à cela.

Notons enfin le résultat suivant.

Proposition 2.108. (a) *Le k-espace vectoriel $\mathbf{P}^{\text{eff}}(k,\sigma)$ est canoniquement isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ par le sous-k-espace vectoriel des séries entières qui s'écrivent sous la forme*

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} - \big(f(t_i = 1) - f(t_i = 0)\big)$$

avec $f \in \mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$. (Ci-dessus, $f(t_i = \epsilon)$ désigne la substitution de la variable t_i par $\epsilon \in \{0,1\}$.) Dans la suite, on notera $[f] \in \mathbf{P}^{\text{eff}}(k,\sigma)$ la classe d'une série entière $f \in \mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$.

(b) *Pour toute permutation $\gamma \in \Sigma_{\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ on a $[f] = [f(t_{\gamma^{-1}(1)}, \dots, t_{\gamma^{-1}(i)}, \dots)]$. De plus, la multiplication de $[f]$ et $[g]$ dans $\mathbf{P}^{\text{eff}}(k,\sigma)$ est donnée par $[fg]$ si les ensembles des variables dont dépendent les séries entières f et g sont disjoints.*

(c) *La composition de $\mathbf{P}^{\text{eff}}(k,\sigma) \to \mathbf{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{cu}} \mathbb{C}$, avec* cu *la counité de la bialgèbre $\mathbf{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma,\mathbb{C})$, associe à la classe d'une série entière f, ne dépendant que des variables $(t_1,\dots,t_n)$, son intégrale $\int_{[0,1]^n} f$.*

Démonstration. Par définition, $\mathbf{P}^{\text{eff}}(k,\sigma)$ est canoniquement isomorphe au quotient de $\mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ par le sous-k-espace vectoriel $\sum_{i=1}^{\infty} \partial_i \mathcal{O}^{(i)}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$. Or, on dispose d'une surjection $\mathrm{a}_i : \mathcal{O}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}^{(i)}_{\text{alg}}(\bar{\mathbb{D}}^{\infty})$ qui envoie une série entière f sur

$$\mathrm{a}_i(f) = f + (t_i - 1) f(t_i = 0) - t_i f(t_i = 1).$$

On obtient (a) en remarquant que $\partial_i(\mathrm{a}_i(f)) = \partial_i f + f(t_i = 0) - f(t_i = 1)$.

On passe maintenant à (b). Soit n un entier suffisamment grand tel que $\gamma \in \Sigma_n$ et f est indépendante des variables t_i pour $i \geq n+1$. Alors $[f]$ est l'image par l'isomorphisme $\mathrm{H}_0(\mathrm{DR}_{\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))) \simeq \mathrm{H}_0(\widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})))$ (cf. proposition 2.100) de la classe d'homologie de $\omega = (-1)^n f\, \mathrm{d}t_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}t_n \in \mathrm{C}_n\Omega^n(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})) \subset \mathrm{DR}_0(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$. Or, $\Omega^n(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ est un k-espace vectoriel cubique Σ-enrichi. Par le lemme A.14, ω est homologue à $\mathrm{sgn}(\gamma)\gamma^*(\omega)$ et l'élément de $\Omega^n(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^{n+1}_{\text{ét}}))$ qui réalise cette homologie (cf. la preuve du lemme A.14) est annulé par la différentielle de de Rham. Étant donné que

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\gamma)\gamma^*(\omega) &= \mathrm{sgn}(\gamma)(-1)^n f(t_{\gamma^{-1}(1)}, \dots, t_{\gamma^{-1}(n)})\, \mathrm{d}t_{\gamma^{-1}(1)} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}t_{\gamma^{-1}(n)} \\ &= (-1)^n f(t_{\gamma^{-1}(1)}, \dots, t_{\gamma^{-1}(n)})\, \mathrm{d}t_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}t_n,\end{aligned}$$

on obtient l'égalité souhaitée $[f] = [\gamma^*(f)]$. La seconde assertion dans (b) se démontre aussi en comparant avec la multiplication de $\mathrm{DR}_{\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$. Les détails sont laissés au lecteur.

Pour (c), on remarque que le lemme de Poincaré holomorphe entraîne que $\mathbb{C}[0] \to \mathrm{DR}_{\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}))$ est un quasi-isomorphisme. Il en est donc de même du morphisme $\mathbb{C}[0] \to \Omega^{\infty-\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}))$ qui envoie une constante $a \in \mathbb{C}$ sur $a\, \mathrm{d}\hat{t}_{\emptyset}$. De plus, la preuve du lemme de Poincaré holomorphe montre que, sur l'homologie en degré zéro, le quasi-inverse de ce dernier envoie la classe de $f\, \mathrm{d}\hat{t}_{\emptyset}$, avec $f \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)$, sur $\int_{[0,1]^n} f$. Pour terminer, il reste donc à identifier le morphisme composé de (c) avec le morphisme induit sur l'homologie en degré zero par la composition de $\Omega^{\infty-\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})) \to \Omega^{\infty-\bullet}(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}})) \simeq \mathbb{C}[0]$. Or, à quasi-isomorphismes près, cette composition coïncide avec celle de

$$\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Omega_{/k}) \to \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(An_*\Omega_{/\mathrm{pt}}) \to \mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}(\Omega_{/\mathrm{pt}}) \simeq \mathbb{C}[0]$$

qu'on peut réécrire, à isomorphismes près dans $\mathbf{D}(k)$, de la manière suivante

$$\mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, An^*(\Omega_{/k})) \to \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, An^*An_*(\Omega_{/\mathrm{pt}})) \to \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{pt}, \Omega_{/\mathrm{pt}}) \simeq \mathbb{C}.$$

Le résultat recherché découle maintenant de la construction de l'isomorphisme du théorème 2.90. □

Remarque 2.109. L'image du morphisme d'intégration $\int : \mathbf{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma) \to \mathbb{C}$ est l'anneau des *périodes* des motifs sur k. Lorsque $k = \mathbb{Q}$, on peut conjecturer, sans espoir de voir un jour la solution, que ce morphisme est injectif. Cette conjecture, sous une forme moins précise, remonte en fait à Grothendieck [20] : « [...] one may ask for instance if Schneider's theorem generalizes in some way to this larger set of periods ». Néanmoins, cette conjecture motive la définition suivante ; voir aussi [26, §4.1].

Définition 2.110. Les éléments de la k-algèbre $\mathbf{P}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma)$ (resp. $\mathbf{P}(k,\sigma)$) sont appelés les *périodes formelles* effectives (resp. non effectives) relativement au plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

2.3.2. Rappels sur les catégories des motifs avec transferts. Étant donnés deux k-schémas lisses U et V, on note $\mathbf{Cor}_k(U,V)$ le groupe des correspondances finies de U dans V. C'est le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas intègres de $U \times_k V$ qui sont finis et surjectifs sur une composante connexe de U.

On note $\mathbf{Cor}(k)$ la catégorie ayant pour objets les k-schémas lisses et pour flèches les correspondances finies. C'est une catégorie additive et monoïdale. La somme directe et le produit tensoriel sont respectivement donnés par le coproduit et le produit des k-schémas. Un *préfaisceau avec transferts* (de Λ-modules) sur Sm/k est un foncteur contravariant et additif de $\mathbf{Cor}(k)$ dans la catégorie des Λ-modules. (On omettra dans la suite de préciser que nos péfaisceaux avec transferts prennent leurs valeurs dans la catégorie des Λ-modules.) Si X est un k-schéma lisse, on note $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ le préfaisceau avec transferts représenté par X, i.e., tel que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)(-) = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{Cor}_k(-,X)$. Les préfaisceaux avec transferts sur Sm/k forment une catégorie qu'on note $\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)$. C'est une catégorie abélienne de Grothendieck. Elle est monoïdale et son produit tensoriel est caractérisé (à isomorphisme près) par la propriété de commuter aux colimites et par l'égalité $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X) \otimes \Lambda_{\mathrm{tr}}(Y) = \Lambda_{\mathrm{tr}}(X \times_k Y)$ vraie pour tous les k-schémas lisses X et Y.

Un *τ-faisceau avec transferts* sur Sm/k est un préfaisceau avec transferts dont la restriction à Sm/k est un τ-faisceau (où $\tau \in \{\text{ét}, \mathrm{Nis}\}$). On note

$$\mathbf{Str}_\tau(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \subset \mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)$$

la sous-catégorie pleine des τ-faisceaux avec transferts. On sait que $\mathbf{Str}_\tau(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)$ est aussi une catégorie abélienne de Grothendieck et que l'inclusion évidente admet un adjoint à gauche $\mathrm{a}^{\mathrm{tr}}_\tau : \mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k,\Lambda) \to \mathbf{Str}_\tau(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)$. Modulo les transferts, $\mathrm{a}^{\mathrm{tr}}_\tau$ est donné par le foncteur de τ-faisceautisation (voir [32, Theorem 6.17, Corollary 6.18, Theorem 13.1]). La catégorie $\mathbf{Str}_\tau(\mathsf{Sm}/k,\Lambda)$ est monoïdale et $\mathrm{a}^{\mathrm{tr}}_\tau$ est un foncteur monoïdal.

On peut munir la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))$ des complexes de préfaisceaux avec transferts d'une structure de modèles projective τ-locale (voir par exemple [6, théorème 2.5.7], où il suffit de se restreindre au cas de la valuation triviale). Le foncteur $\mathrm{a}_\tau^{\mathrm{tr}}$ induit alors une équivalence de catégories

$$\mathsf{La}_\tau^{\mathrm{tr}} : \mathbf{Ho}_\tau(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(\mathbf{Str}_\tau(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)),$$

entre la catégorie homotopique de la structure τ-locale et la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\mathbf{Str}_\tau(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)$. (Pour une preuve lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, voir [6, proposition 2.4.9] ; le cas $\tau = \text{ét}$ n'est pas plus difficile.) Une localisation à la Bousfield de la structure τ-locale fournit la structure projective $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale pour laquelle les flèches $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^1_X)[n] \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)[n]$ sont des équivalences faibles pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout k-schéma lisse X. On pose

$$\mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1-\tau}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))),$$

la catégorie homotopique de la structure $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. C'est la catégorie des k-motifs effectifs (avec transferts). Elle est triangulée et monoïdale. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie et on notera simplement $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$.

On dispose d'un couple de foncteurs adjoints $(\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ d'ajout et d'oubli de transferts

$$\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda) \underset{\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda).$$

Le foncteur o_{tr} associe à un préfaisceau avec transferts sa restriction à Sm/k. Le foncteur a_{tr} est monoïdal, commute aux colimites et envoie $X \otimes \Lambda$ sur $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$. L'adjonction $(\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ fournit une adjonction de Quillen sur les catégories de complexes qu'on munit des structures projectives $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locales. (Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, il s'agit du cas particulier de la valuation triviale de [6, proposition 2.5.19] ; le cas $\tau = \text{ét}$ n'est pas plus difficile.) On en déduit une adjonction

$$\mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda) \underset{\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda).$$

Le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est triangulé et monoïdal. Lorsque $\tau = \text{ét}$ et que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, les foncteurs $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ et $\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}$ sont des équivalences inverses l'une de l'autre (voir le théorème B.1). En général, il n'est pas nécessaire de dériver le foncteur o_{tr}. En effet, on a le résultat suivant.

Lemme 2.111. *Le foncteur* $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))$ *préserve les équivalences* $(\mathbb{A}^1, \tau)$*-locales.*

Démonstration. On note respectivement $\mathbf{W}_\tau$ et $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-\tau}$ les classes des équivalences τ-locales et $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locales. Il s'agit de montrer que $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-\tau} \subset \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}^{-1}(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-\tau})$. Par [5, proposition 4.2.74], il suffit de voir que la classe $\mathcal{D} = \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}^{-1}(\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1-\tau})$ satisfait aux conditions suivantes :

(1) $\mathcal{D}$ contient $\mathbf{W}_\tau$ et les flèches $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^1_X) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ pour tout $X \in \mathsf{Sm}/k$;

(2) $\mathcal{D}$ vérifie la propriété 2 de 3 ;

(3) $\mathcal{D} \cap \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}$ est stable par pushout et composition transfinie.

La condition (2) est claire. Pour (3), on utilise la structure injective $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))$. La classe $\mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}$ des cofibrations injectives est la classe des monomorphismes. Or, $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D} \cap \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}})$ est contenue dans $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1,\tau} \cap \mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}$ et $\mathbf{W}_{\mathbb{A}^1,\tau} \cap \mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}$ est stable par pushout et composition transfinie (ceci étant vrai dans toute catégorie de modèles). On obtient maintenant la condition (3) en remarquant que o_{tr} commute aux colimites. D'autre part, o_{tr} préserve les équivalences τ-locales. Ainsi, pour terminer, il reste à vérifier que o_{tr} envoie $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^1_X) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ sur une équivalence $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. Ceci peut se faire à l'aide d'une $\mathbb{A}^1$-homotopie explicite entre l'identité et l'endomorphisme nul de la droite affine relative $\mathbb{A}^1_X$. □

On choisit un remplacement projectivement cofibrant T_k^{tr} du préfaisceau avec transferts quotient $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^1_k)/\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}^1_k - o_k)$. (Par exemple, $T_k^{\mathrm{tr}} = \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(T_k)$ avec T_k comme dans la section 2.1.) On note $\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)))$ la catégorie des T_k^{tr}-spectres symétriques de complexes de préfaisceaux avec transferts sur Sm/k. On munit cette catégorie de la structure projective stable déduite de la structure projective $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. On pose

$$\mathbf{DM}^{\tau}(k, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1-\tau-\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}^{\Sigma}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)))),$$

la catégorie homotopique de la structure stable $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale. C'est la catégorie des k-motifs (version avec transferts). Elle est triangulée et monoïdale. Lorsque $\tau = \mathrm{Nis}$, on omettra la mention de la topologie et on notera simplement $\mathbf{DM}(k, \Lambda)$. On dispose d'un foncteur de T_k^{tr}-suspension infinie $\mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{tr}}} : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\tau}(k, \Lambda) \to \mathbf{DM}^{\tau}(k, \Lambda)$ qui est triangulé et monoïdal (voir [5, lemme 4.3.9, proposition 4.3.35, corollaire 4.3.72]). Son adjoint à droite est $\mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0$.

Comme dans le cas effectif, on dispose d'une adjonction

$$\mathbf{DA}^{\tau}(k, \Lambda) \underset{\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}}{\overset{\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{DM}^{\tau}(k, \Lambda).$$

Elle s'obtient en prenant $T_k^{\mathrm{tr}} = \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(T_k)$ et en appliquant [5, lemme 4.3.34] au foncteur de Quillen à gauche a_{tr}. Le foncteur $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ ci-dessus est triangulé et monoïdal. Lorsque $\tau = $ ét, les foncteurs $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ et $\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}$ ci-dessus sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre, et cela sans hypothèses sur Λ (voir le corollaire B.14). Enfin, on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} \circ \mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k} \simeq \mathsf{L}\,\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{tr}}} \circ \mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ qui fait le lien avec le cas effectif.

Comme dans le cas effectif, il n'est pas nécessaire de dériver le foncteur o_{tr}, du moins si l'on travaille avec les spectres non symétriques.

Lemme 2.112. *Le foncteur*

$$\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Spt}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))) \to \mathbf{Spt}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda)))$$

préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \tau)$*-locales stables.*

Démonstration. Comme pour le lemme 2.111, on utilise [5, proposition 4.2.74] et la construction de la structure $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale stable comme une localisation de Bousfield suivant les flèches $\mathrm{Sus}^{p+1}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)) \to \mathrm{Sus}^{p}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(T_k^{\mathrm{tr}} \otimes \Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$. On se ramène alors à vérifier que

$$\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\big(\mathrm{Sus}^{p+1}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))\big) \to \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\big(\mathrm{Sus}^{p}_{T_k^{\mathrm{tr}}}(T_k^{\mathrm{tr}} \otimes \Lambda_{\mathrm{tr}}(X))\big)$$

est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \tau)$-locale stable. Or, ce morphisme est un isomorphisme en niveau supérieur à $p + 1$. (C'est ici qu'on utilise que nos spectres sont non symétriques !) Il suffit alors d'appliquer [5, lemme 4.3.59] pour conclure. □

2.3.3. Des complexes de cycles à la Suslin–Voevodsky. Rappelons qu'on cherche à « calculer » $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) = \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*(\Lambda)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) = \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$. On commence d'abord par décrire $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*(\Lambda)$ et $\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$, les objets de $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)$ et $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$ qui représentent la cohomologie de Betti. Par le résultat ci-dessous, il suffit de considérer la version stable.

Lemme 2.113. *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathsf{Bti}^{\mathrm{eff}}_*(\Lambda) \simeq \mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0(\mathsf{Bti}_*(\Lambda))$.

Démonstration. En effet, on a $\mathsf{Bti}^* \circ \mathrm{Sus}^0_{T_k} \simeq \mathsf{Bti}^{\mathrm{eff},*}$. L'isomorphisme recherché s'en déduit par adjonction. □

On a $\mathsf{Bti}_*(\Lambda) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathbf{S}_T)$ avec $\mathbf{S}_T = \mathrm{Sus}^0_{T_k}(\Lambda_{\mathrm{cst}})$, l'unité de $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$. On pose $\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T = \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}(\mathbf{S}_T)$. (Par définition, le T^{tr}_k-spectre symétrique $\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T$ est donné en degré n par $(T^{\mathrm{tr}}_k)^{\otimes n} = \Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n})$ muni de l'action évidente du groupe symétrique Σ_n.) D'après le corollaire B.14, le morphisme canonique $\mathbf{S}_T \to \mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T$, vu comme flèche de $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$, induit un isomorphisme dans $\mathbf{DA}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$. On utilise ici le lemme 2.112. Puisque le foncteur Bti^* se factorise par $\mathbf{DA}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$, il s'ensuit que $\mathsf{Bti}^*(\mathbf{S}_T) \simeq \mathsf{Bti}^*(\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)$. Ainsi, on a $\mathsf{Bti}_*(\Lambda) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)$. Pour calculer $\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$, on appliquera le théorème 2.67 à un modèle bien choisi de $\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\,\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T$. On utilisera la théorie de Voevodsky pour obtenir un tel modèle.

Rappelons qu'on dispose d'un objet cocubique Σ-enrichi $\mathbb{A}_k$ dans Sm/k (cf. l'exemple A.2) donné en degré $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbb{A}^n_k$, l'espace affine de dimension n sur k. On note $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}$ le foncteur qui associe à un complexe de préfaisceaux sur Sm/k le complexe $\mathrm{Tot}(\mathsf{C}(\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}_k,K)))$. Il s'agit de la variante cubique du complexe de Suslin–Voevodsky. Ce foncteur s'étend aux T^{tr}_k-spectres symétriques. De plus, le morphisme évident $\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-locale niveau par niveau. Le résultat ci-dessous affirme donc que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)$ est un modèle projectivement stablement $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$-fibrant de l'unité de $\mathbf{DM}(k,\Lambda)$.

Proposition 2.114. *Le* T^{tr}_k*-spectre symétrique* $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)$ *est projectivement stablement* $(\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis})$*-fibrant.*

Cette proposition est une conséquence immédiate d'un certain nombre de résultats dus à Voevodsky, et à Friedlander et Voevodsky. On rappelle ces résultats qui seront également utiles dans la section 2.3.4.

Soient X un k-schéma de type fini, non nécessairement lisse, et $r \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Pour U un k-schéma lisse, on note, suivant [46], $z_{\mathrm{equi}}(X,r)(U)$ le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas fermés intègres $Z \subset X \times_k U$ tels que la projection $Z \to U$ est équidimensionnelle de dimension relative r. Pour la définition d'un morphisme équidimensionnel, on renvoie le lecteur à [21, définition 13.2.2] (pour le cas irréductible) et [21, définition 13.3.2] (pour le cas général). On rappelle ici que cela entraîne que Z domine une composante connexe de U et que les fibres de $Z \to U$ sont purement de dimension r. De plus, tout changement de base de $Z \to U$ est encore équidimensionnel de dimension relative r. Cette dernière propriété découle de [21, corollaire 14.4.4] étant donné que U est lisse. On en déduit aussitôt que $z_{\mathrm{equi}}(X,r)$ est naturellement un préfaisceau avec transferts sur Sm/k (cf. [32, Example 16.3] et [46, Chapter 4, Proposition 5.7]). Clairement, si X est projectif (ou même propre), alors $z_{\mathrm{equi}}(X,0) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$. Si Y est un k-schéma lisse partout de dimension p, on dispose d'un morphisme de préfaisceaux avec transferts sur Sm/k (cf. [46, Proposition 5.8])

$$\mathcal{D} : \underline{\mathrm{hom}}(Y, z_{\mathrm{equi}}(X,r)) \to z_{\mathrm{equi}}(X \times_k Y, r+p).$$

Le premier résultat essentiel, du à Friedlander et Voevodsky, est un « lemme de déplacement ». Il s'énonce comme suit.

Théorème 2.115. *Le morphisme*

$$\mathcal{D} : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\underline{\mathrm{hom}}(Y, z_{\mathrm{equi}}(X, r))) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k Y, r + p))$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux.

Démonstration. Il s'agit de la variante cubique de [46, Chapter 4, Theorem 7.1] qui s'en déduit aussitôt par la méthode, désormais classique, de [27, Theorem 4.7]. □

Le second résultat essentiel est un théorème de localisation. Il repose sur la résolution des singularités et s'énonce comme suit.

Théorème 2.116. *Soient X un k-schéma, $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert et $i : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion du fermé complémentaire. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite exacte*

$$0 \to z_{\mathrm{equi}}(Z, r) \xrightarrow{i_*} z_{\mathrm{equi}}(X, r) \xrightarrow{j^*} z_{\mathrm{equi}}(U, r)$$

induit un triangle distingué

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(Z, r)) \xrightarrow{i_*} \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r)) \xrightarrow{j^*} \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(U, r)) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(Z, r))[1]$$

dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \mathbb{Z})))$ *de la structure* Nis-*locale.*

Démonstration. Il s'agit de la variante cubique de [46, Chapter 4, Theorem 5.11] qui s'en déduit aussitôt. □

On peut maintenant établir le fait suivant.

Corollaire 2.117. *Soient X un k-schéma de type fini et $r \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors, le complexe $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r))$ est projectivement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant.*

Démonstration. Par le lemme A.25, $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r)) \to \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}^1_k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r)))$ est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux. Il reste donc à montrer que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r))$ est projectivement Nis-fibrant, i.e., qu'il vérifie la propriété de Brown–Gersten pour la topologie Nisnevich (voir [35, Definition 1.13]). On se donne une immersion ouverte $j : W \to V$ et un morphisme étale $e : V' \to V$ induisant un isomorphisme $V' - W' \simeq V - W$ (avec $W' = V' \times_V W$). On doit montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(V, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r))) & \longrightarrow & \Gamma(W, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r))) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Gamma(V', \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r))) & \longrightarrow & \Gamma(W', \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X, r)))
\end{array}$$

est homotopiquement cartésien. On ne restreint pas la généralité en supposant que V est connexe de dimension pure d. Par le théorème 2.115, il suffit alors de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc}\Gamma\big(k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k V, r+d))\big) & \longrightarrow & \Gamma\big(k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k W, r+d))\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma\big(k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k V', r+d))\big) & \longrightarrow & \Gamma\big(k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k W', r+d))\big)\end{array}$$

est homotopiquement cartésien. Par le théorème 2.116 et puisque $\Gamma(k, -)$ transforme les équivalences Nis-locales en des quasi-isomorphismes, il suffit de montrer que

$$e^* : \Gamma\big(k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k (V - W), r+d))\big) \to \Gamma\big(k, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(z_{\mathrm{equi}}(X \times_k (V' - W'), r+d))\big)$$

est un quasi-isomorphisme. Or, ce morphisme est inversible puisque $V' - W' \simeq V - W$. □

Corollaire 2.118. *Soit X un k-schéma projectif (ou propre). Alors, $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$ est projectivement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant.*

Démonstration. Lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}$, c'est clair puisque $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) = z_{\mathrm{equi}}(X, 0)$ pour X propre. Le cas général découle aussitôt du fait que le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ prend ses valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules libres. □

Démonstration de la proposition 2.114. D'après le corollaire 2.118, le T_k^{tr}-spectre symétrique $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}})$ est projectivement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant niveau par niveau. Il reste donc à montrer qu'il est un Ω-spectre. Autrement dit, il faut montrer que

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{P}_k^1, \infty)^{\wedge n})) \to \underline{\mathrm{hom}}\big((\mathbb{P}_k^1, \infty), \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{P}_k^1, \infty)^{\wedge n+1}))\big)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. Ceci découle du théorème de simplification de Voevodsky (cf. [32, Theorem 16.25]). □

Remarque 2.119. La preuve de la proposition 2.114 montre plus généralement que pour tout k-schéma projectif et lisse X, le T_k^{tr}-spectre symétrique

$$\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))) = \big\{\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{P}_k^1, \infty)^{\wedge n} \times_k X))\big\}_{n \in \mathbb{N}}$$

est projectivement stablement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant. De plus, il est $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-équivalent niveau par niveau à $\mathrm{Sus}^0_{T_k^{\mathrm{tr}}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$.

Corollaire 2.120. *Le morphisme canonique $\mathbf{S}_T \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}})$ est un isomorphisme dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k, \Lambda)$ et le T_k-spectre symétrique $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}})$ est projectivement stablement $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant.*

Démonstration. D'après le corollaire B.14, on a un isomorphisme canonique $\mathbf{S}_T \simeq \mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}}$ dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k, \Lambda)$. Le lemme 2.112 entraîne que $\mathsf{R}\,\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}} \simeq \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}})$ dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k, \Lambda)$. La première assertion en découle. Enfin, la proposition 2.114 montre que $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}})$ est $(\mathbb{A}^1, \mathrm{Nis})$-fibrant. □

À partir de maintenant, on notera $\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}}$ au lieu de $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}}$.

Proposition 2.121. *Le T_k-spectre symétrique* $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$ *est projectivement stablement* $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$*-fibrant et il est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$*, à* $\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$.

Démonstration. Le foncteur Bti^* se factorise par $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k,\Lambda)$. Le corollaire 2.120 fournit donc un isomorphisme

$$\mathsf{Bti}^*(\mathbf{S}_T) \simeq \mathsf{Bti}^*(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)).$$

Il s'ensuit que $\mathsf{Bti}_*(\Lambda) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))$ dans $\mathbf{DA}(k,\Lambda)$. Le théorème 2.67 (avec $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$ au lieu de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}$) fournit donc l'énoncé correspondant pour le T_k-spectre $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))$. Il reste donc à voir que $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))$ est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau. Ceci découle du lemme 2.122 ci-dessous. □

Lemme 2.122. *Soit K un complexe de préfaisceaux sur* Sm/k*. Alors, le morphisme* $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(K))$ *est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(K) \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{A}^1_k, K))$ est une équivalence d'homotopie. Or, le complexe (en complexes de préfaisceaux) $\mathrm{C}_\bullet(\underline{\mathrm{hom}}((\mathbb{A}^1_k, 0)\times\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, K))$ est contractile. Une homotopie entre l'identité et le morphisme nul est induite par la composition de $\mathbb{A}^1_k \times_k \bar{\mathbb{D}}^1_{\text{ét}} \to \mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$; le second morphisme étant la multiplication du schéma en anneau $\mathbb{A}^1_k$. □

Proposition 2.123. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)) \simeq \mathsf{Bti}^{\text{eff}}_*(\Lambda)$$

dans $\mathbf{DA}^{\text{eff}}(k,\Lambda)$*. De plus, le complexe* $\mathrm{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))$ *est la colimite de la $\mathbb{N}$-suite* $(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}))[-2n])_{n\in\mathbb{N}}$ *où le morphisme de transition*

$$\theta'_n : \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}))[-2n] \to \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n+1}))[-2n-2],$$

en degré homologique $m-2n$ (avec $m \in \mathbb{N}$), associe à une correspondance finie $\beta \in \mathbf{Cor}_k((\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}}) \times_k \dagger, (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n})$ *la correspondance finie composée*

$$\bar{\mathbb{D}}^{2+m}_{\text{ét}} \times_k \dagger \to \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^m_{\text{ét}} \times_k \dagger \xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n = (\mathbb{P}^1_k)^{1+n}.$$

(La correspondance $\alpha \in \mathbf{Cor}_k((\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}, \partial\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k,\infty))$ *est celle définie dans la section* 2.2.5.*)*

Démonstration. La proposition 2.121, jointe au lemme 2.113, entraîne que $\mathsf{Bti}^{\text{eff}}_*(\Lambda)$ est isomorphe, dans $\mathbf{DA}^{\text{eff}}(k,\Lambda)$, au complexe de préfaisceaux $\mathrm{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))$. La seconde partie de l'énoncé découle de la construction du foncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}$ et notamment de la définition de la transformation naturelle ϑ' (cf. (65)). □

On arrive maintenant au résultat principal de cette section.

Théorème 2.124. (a) *Le complexe* $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eff}} = \big\{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathbf{Cor}_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, (\mathbb{P}_k^1,\infty)^{\wedge n}) \otimes \Lambda))[-2n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Le morphisme de transition $n \to n+1$ *envoie*

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p, \partial_0\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p) \wedge (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q, \partial_0\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q), (\mathbb{P}_k^1,\infty)^{\wedge n}\big)$$

(avec p, $q \in \mathbb{N}$*) sur la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^{2+p} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q \to \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^2 \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q \xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}_k^1 \times_k (\mathbb{P}_k^1)^n = (\mathbb{P}_k^1)^{1+n}.$$

(b) *Le complexe* $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}} = \big\{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathbf{Cor}_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, (\mathbb{P}_k^1,\infty)^{\wedge m+n}) \otimes \Lambda))[-2m-2n]\big\}_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n) \to (m+1,n)$ *et* $(m,n) \to (m,n+1)$ *envoient respectivement une correspondance finie*

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p, \partial_0\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p) \wedge (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q, \partial_0\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q), (\mathbb{P}_k^1,\infty)^{\wedge m+n}\big)$$

(avec p, $q \in \mathbb{N}$*) sur les compositions de*

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^{p} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^{q+2} \to \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^2\\ &\qquad\xrightarrow{\beta\boxtimes\alpha} (\mathbb{P}_k^1)^m \times_k (\mathbb{P}_k^1)^n \times_k \mathbb{P}_k^1 \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}_k^1)^m \times_k \mathbb{P}_k^1 \times_k (\mathbb{P}_k^1)^n,\\ &\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^{2+p} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q \to \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^2 \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^p \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^q\\ &\qquad\xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}_k^1 \times_k (\mathbb{P}_k^1)^m \times_k (\mathbb{P}_k^1)^n \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}_k^1)^m \times_k \mathbb{P}_k^1 \times_k (\mathbb{P}_k^1)^n.\end{aligned}$$

Démonstration. Pour (a), on utilise le corollaire 2.63 et la première partie de la proposition 2.123 pour obtenir un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda) \simeq \mathrm{Sg}_{\text{ét}}^{\mathbb{D}}(\mathrm{Ev}_0\, \mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty'}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}}))$ dans $\mathbf{D}(\Lambda)$. En utilisant la seconde partie de la proposition 2.123 on obtient aussitôt la description recherchée de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$. Pour (b), on utilise le théorème 2.67 et la proposition 2.121 pour obtenir la chaîne d'isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \simeq \mathsf{Bti}^*\mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty'}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}}) &\simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathsf{R}\,\mathrm{Ev}_0\ \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty'}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}}))\\ &\simeq \Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0\ \mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty} \circ \mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty'}(\mathbf{S}_T^{\mathrm{tr}})).\end{aligned}$$

On arrive maintenant à la description recherchée en démêlant les constructions de $\mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty}$ et $\mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty'}$. On laissera cet exercice, malheureusement un peu pénible, au lecteur. □

Notre objectif est maintenant de décrire la multiplication de la bialgèbre $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$. On ne considère que le cas effectif de la question puisque la multiplication de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$ détermine la multiplication de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ par le théorème 2.14. On aura besoin de deux descriptions alternatives de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{eff}}(k,\sigma,\Lambda)$, similaires à celle du théorème 2.124. Elle sont obtenues en utilisant, dans la proposition 2.123 et le théorème 2.124, les foncteurs $\mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty}$ et $\mathbf{Sing}_{\text{ét}}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}$ au lieu de $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}$. Le résultat est le suivant.

Lemme 2.125. (a′) *Le complexe* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{II}} = \big\{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathbf{Cor}_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}) \otimes \Lambda))[-2n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Le morphisme de transition $n \to n+1$ *envoie*

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}\big)$$

(avec $p,\ q \in \mathbb{N}$*) sur la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \xrightarrow{\beta\boxtimes\alpha} (\mathbb{P}^1_k)^n \times_k \mathbb{P}^1_k = (\mathbb{P}^1_k)^{n+1}.$$

(a″) *Le complexe* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{III}} = \big\{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathbf{Cor}_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge m+n}) \otimes \Lambda))[-2m-2n]\big\}_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n) \to (m+1,n)$ *et* $(m,n) \to (m,n+1)$ *envoient respectivement une correspondance finie*

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge m+n}\big)$$

(avec $p,\ q \in \mathbb{N}$*) sur les compositions de*

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n, \\
&\bar{\mathbb{D}}^{2+p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n.
\end{aligned}$$

Proposition 2.126. *Modulo l'isomorphisme du théorème* 2.124 (a) *et ses variantes dans* (a′) *et* (a″) *du lemme* 2.125*, la multiplication de l'algèbre* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est induite par le morphisme de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suites* $\mathcal{S}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{S}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{II}} \to \mathcal{S}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{III}}$ *qui envoie* $\gamma\otimes\beta$*, avec*

$$\begin{aligned}
\beta &\in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge m}\big), \\
\gamma &\in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^s_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^s_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}\big),
\end{aligned}$$

sur la composition de

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{D}}^{r+p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{s+q}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^s_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^s_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\gamma\boxtimes\beta} (\mathbb{P}^1_k)^n \times_k (\mathbb{P}^1_k)^m \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n.
\end{aligned}$$

Démonstration. Le théorème 2.87 entraîne que la multiplication de $\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$ est la composition de

(77)
$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \xrightarrow{\text{c}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}\big(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \otimes \mathbf{S}^{\text{tr}}_T\big)$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \xrightarrow{\text{m}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T).$$

En appliquant le foncteur monoïdal Ev_0, on obtient la multiplication de l'algèbre $\mathsf{Bti}^{\text{eff}}_*(\Lambda)$ modulo l'isomorphisme de la proposition 2.123 et ses variantes. Enfin, par la proposition 2.83, on obtient la multiplication de $\mathcal{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ modulo les isomorphismes de l'énoncé en appliquant le foncteur pseudo-monoïdal $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$. Il reste à vérifier que l'accouplement ainsi obtenu coïncide avec l'accouplement décrit dans l'énoncé. On y arrive en démêlant la construction des morphismes dans (77). □

Nous terminons cette section par une description de la comultiplication de $\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. Notre méthode s'applique uniquement au cas stable et la description obtenue est peu explicite. En effet, elle fait intervenir un quasi-inverse d'un quasi-isomorphisme de complexes qui est certainement très difficile à décrire concrètement.

Par le théorème 2.67 et la proposition 2.121 on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(\Lambda)$:

(78)
$$\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma,\Lambda) \simeq \Gamma\big(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))\big).$$

(cf. la preuve de la partie (b) du théorème 2.124). En revenant à la construction du foncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}$, on peut décrire explicitement le second terme de (78). Ceci fournit la variante suivante du théorème 2.124 (b).

Lemme 2.127. (b′) *Le complexe* $\Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)))$ *est égal à la colimite de la* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}_{\text{II}} = \big\{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathbf{Cor}_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge m+n}) \otimes \Lambda))[-2m-2n]\big\}_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n) \to (m+1,n)$ *et* $(m,n)\to(m,n+1)$ *envoient respectivement une correspondance finie*

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge m+n}\big)$$

(avec $p,\ q\in\mathbb{N}$*) sur les compositions de*

$$\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q+2}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}$$
$$\xrightarrow{\beta\boxtimes\alpha} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \times_k \mathbb{P}^1_k \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n,$$
$$\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}$$
$$\underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \xrightarrow{\beta\boxtimes\alpha} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \times_k \mathbb{P}^1_k.$$

On dispose d'une transformation naturelle évidente $\mathrm{id} \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}$ et, par une variante du corollaire 2.74, le morphisme obtenu en appliquant $\Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0(-))$ à

(79)
$$\underline{\eta} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) = \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathrm{id} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$$
$$\to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$$

coïncide avec le morphisme $\eta : \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda) \to \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$ induit par l'unité de l'adjonction $(\mathsf{Bti}^*, \mathsf{Bti}_*)$. Les deux résultats suivants découlent directement des constructions.

Proposition 2.128. *Le complexe*

$$\Gamma\big(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T))\big)$$

est égal à la colimite de la $\mathbb{N}^4$-suite $\mathcal{T}$ dont les termes sont donnés par

$$\big\{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathbf{Cor}_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, (\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m+n+u+v}) \otimes \Lambda))[-2m-2n-2u-2v]\big\}_{m,n,u,v\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n,u,v) \to (m+1,n,u,v)$, $(m,n,u,v) \to (m,n+1,u,v)$, $(m,n,u,v) \to (m,n,u+1,v)$ et $(m,n,u,v) \to (m,n,u,v+1)$ envoient

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m+n+u+v}\big)$$

(avec p, q, $r \in \mathbb{N}$) sur les compositions respectives de

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{r+2}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \xrightarrow{\beta\boxtimes\alpha} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{n+u+v} \times_k \mathbb{P}^1_k \\
&\qquad\qquad \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{n+u+v}, \\
&\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \\
&\qquad\qquad \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \xrightarrow{\beta\boxtimes\alpha} (\mathbb{P}^1_k)^{m+n} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{u+v} \times \mathbb{P}^1_k \\
&\qquad\qquad \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^{m+n} \times_k \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{u+v}, \\
&\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2+q}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \\
&\qquad\qquad \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{m+n} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{u+v} \\
&\qquad\qquad \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^{m+n} \times_k \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{u+v}, \\
&\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\alpha\boxtimes\beta} \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{m+n+u+v} \underset{\sim}{\xrightarrow{\tau}} (\mathbb{P}^1_k)^{m+n+u+v} \times_k \mathbb{P}^1_k.
\end{aligned}$$

Lemme 2.129. *Le morphisme $\Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0(\underline{\eta}))$, déduit de* (79)*, est obtenu par passage aux colimites à partir d'un morphisme d'ind-objets $\eta : \mathcal{S}_{\mathrm{II}} \to \mathcal{T}$. Sur les ensembles d'indices, il est donné par l'application $(m,n) \in \mathbb{N}^2 \rightsquigarrow (m,0,0,n)$ et il applique identiquement le facteur direct $\mathbf{Cor}_k((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m+n}) \otimes \Lambda$ (avec p, $q \in \mathbb{N}$) sur le facteur direct $\mathbf{Cor}_k((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^0_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^0_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m+0+0+n}) \otimes \Lambda$.*

On pose $\underline{\mathcal{H}} = \Gamma(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)) = \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^2}\, \mathcal{S}_{\mathrm{II}}$. On dispose d'un morphisme évident

$$\mathrm{Sus}^0_{T_k}((\underline{\mathcal{H}})_{\mathrm{cst}}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)$$

induit par les unités des adjonctions $(\mathrm{Sus}^0_{T_k}, \mathrm{Ev}_0)$ et $((-)_{\mathrm{cst}}, \Gamma(\mathrm{Spec}(k), -))$. On note

$$\underline{\phi} : \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T) \otimes \mathrm{Sus}^0_{T_k}((\underline{\mathcal{H}})_{\mathrm{cst}}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T) \tag{80}$$

la composition de

$$\text{(81)}\quad \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}((\underline{\mathcal{H}})_{\text{cst}}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$$
$$\xrightarrow{\text{m}} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}\big(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T \otimes \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)\big)$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)).$$

Lemme 2.130. *Le morphisme* (80) *s'identifie, modulo l'isomorphisme* (78) *et celui du théorème* 2.67 *(ainsi que ses variantes), à la composition de*

$$\text{(82)}\quad \mathsf{Bti}_*(\Lambda)\ {}^{\mathsf{L}}\!\otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}(\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda))_{\text{cst}} \xrightarrow{c_d} \mathsf{Bti}_*(\Lambda \otimes \mathsf{Bti}^*(\text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}(\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda))_{\text{cst}}))$$
$$\simeq \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda).$$

En particulier, (80) *est un quasi-isomorphisme niveau par niveau.*

Démonstration. Notons d'abord que la composition de (82) coïncide avec celle de

$$\text{(83)}\quad \mathsf{Bti}_*(\Lambda)\ {}^{\mathsf{L}}\!\otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}(\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda))_{\text{cst}} \to \mathsf{Bti}_*(\Lambda)\ {}^{\mathsf{L}}\!\otimes \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda)$$
$$\xrightarrow{\text{m}} \mathsf{Bti}_*(\Lambda \otimes \mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda))$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*\mathsf{Bti}_*(\Lambda).$$

Ceci est une propriété formelle qui découle des hypothèses générales de la section 1.4 (avec $f = \mathsf{Bti}^*$, $g = \mathsf{Bti}_*$, $e = \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k} \circ (-)_{\text{cst}}$ et $u = \mathsf{R}\Gamma(\text{Spec}(k), \mathsf{R}\,\text{Ev}_0(-)))$. Sa vérification est omise.

En utilisant le théorème 2.87, on déduit aussitôt que la composition de (83) coïncide, modulo les isomorphismes canoniques, avec celle de (81) qu'on prolonge à gauche par le morphisme évident

$$\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)\ {}^{\mathsf{L}}\!\otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}((\underline{\mathcal{H}})_{\text{cst}}) \to \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T) \otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}((\underline{\mathcal{H}})_{\text{cst}}).$$

Or, le morphisme ci-dessus est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. En effet, le foncteur $- \otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}((\underline{\mathcal{H}})_{\text{cst}})$ envoie un T_k-spectre symétrique $\mathbf{E}$ sur le T_k-spectre symétrique donné en degré n par $\mathbf{E}_n \otimes (\underline{\mathcal{H}})_{\text{cst}}$. Puisque $\underline{\mathcal{H}}$ est une colimite filtrante de complexes de Λ-modules libres, on voit que ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes. Par la même occasion, on obtient aussi que ce foncteur préserve les objets stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$-fibrants. Puisque la composition de (82) est un isomorphisme dans $\mathbf{DA}(k, \Lambda)$, on déduit que (80) est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Le lemme est démontré. □

On pose maintenant $\underline{\mathcal{H}}' = \Gamma(\text{Spec}(k), \text{Ev}_0\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)) = \text{colim}_{\mathbb{N}^2}\, \mathcal{S}_{\text{I}}$. On dispose d'un morphisme

$$\text{(84)}\quad \underline{\mathcal{H}}' \otimes \underline{\mathcal{H}} \to \Gamma\big(\text{Spec}(k), \text{Ev}_0(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))\big).$$

Il est donné par la composition de

$$\Gamma\big(\text{Spec}(k), \text{Ev}_0\, \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)\big) \otimes \underline{\mathcal{H}}$$
$$\xrightarrow{\sim} \Gamma\big(\text{Spec}(k), \text{Ev}_0\big((\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)) \otimes \text{Sus}^{\mathbf{0}}_{T_k}(\underline{\mathcal{H}})_{\text{cst}}\big)\big)$$

$$\xrightarrow[\sim]{c'} \Gamma\big(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0\big(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty'}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T) \otimes \mathrm{Sus}^0_{T_k}(\underline{\mathcal{H}})_{\mathrm{cst}})\big)\big)$$
$$\xrightarrow{\phi} \Gamma\big(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Ev}_0\big(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty,\infty'}_{\text{ét}} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{S}^{\mathrm{tr}}_T)\big)\big).$$

Par le lemme 2.130, (84) est un quasi-isomorphisme.

Lemme 2.131. *Le morphisme* (84) *est obtenu par passage aux colimites à partir d'un morphisme d'ind-objets* $\phi : \mathcal{S}_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{S}_{\mathrm{II}} \to \mathcal{T}$*. Sur les ensembles d'indices,* ϕ *est donné par l'application* $((m',n'),(m,n)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \rightsquigarrow (m',m,n',n)$*. Il envoie* $\beta' \otimes \beta$*, avec*

$$\beta \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m+n}\big)$$
$$\beta' \in \mathbf{Cor}_k\big((\bar{\mathbb{D}}^{p'}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{p'}_{\text{ét}}) \wedge (\bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}}, \partial_0\bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}}), (\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m'+n'}\big),$$

sur la composition de

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p'+q}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}} &\to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p'}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}} \\
&\xrightarrow[\sim]{\left(\begin{smallmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{smallmatrix}\right)} \bar{\mathbb{D}}^{p'}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \\
&\xrightarrow{\beta' \boxtimes \beta} (\mathbb{P}^1_k)^{m'} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{n'} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \\
&\xrightarrow[\sim]{\tau} (\mathbb{P}^1_k)^{m'} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^m \times_k (\mathbb{P}^1_k)^{n'} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n.
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est omise puisqu'il s'agit d'une conséquence directe, quoique assez pénible, des constructions. Toutefois, nous invitons le lecteur à vérifier que ϕ, comme décrit ci-dessus, est un morphisme d'ind-objets, i.e., qu'il est compatible aux morphismes de transition du théorème 2.124 (b), du lemme 2.127 (b′) et de la proposition 2.128. □

On arrive maintenant à la description promise de la comultiplication de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$.

Proposition 2.132. *Le morphisme* $\phi : \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}_{\mathrm{I}} \otimes \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}_{\mathrm{II}} \to \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^4} \mathcal{T}$ *est inversible dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$ *et la composition de*

$$\operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}_{\mathrm{II}} \xrightarrow{\eta} \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^4} \mathcal{T} \xrightarrow[\sim]{\phi^{-1}} \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}_{\mathrm{I}} \otimes \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}_{\mathrm{II}}$$

coïncide avec la comultiplication de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *modulo l'isomorphisme du théorème* 2.124 (b) *et celui du lemme* 2.127 (b′).

Démonstration. La proposition découle immédiatement du lemme 2.130 et de la définition de la comultiplication de la bialgèbre $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ (cf. théorème 1.21). □

2.3.4. Des complexes de cycles à la Bloch. On modifie les complexes de la section 2.3.3 pour obtenir des complexes de cycles à la Bloch qui représentent les bialgèbres motiviques $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. On rappelle d'abord les résultats dont on aura besoin.

Soit X un k-schéma de type fini. Pour c, $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{Z}^c(X,n)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés $Z \subset X \times_k \mathbb{A}^n$, intègres, partout de codimension

c et qui intersectent proprement les faces du schéma cocubique $X \times_k \mathbb{A}_k$ (i.e., les images des immersions fermées $X \times_k \mathbb{A}_k^{n-i} \hookrightarrow X \times_k \mathbb{A}_k^n$ qui correspondent aux inclusions $\underline{\mathbf{1}}^{n-i} \hookrightarrow \underline{\mathbf{1}}^n$ dans $\boxplus$). On peut alors définir des morphismes de pullback $a^* : \mathcal{Z}^c(X,n) \to \mathcal{Z}^c(X,m)$ associés aux flèches $a : \underline{\mathbf{1}}^m \to \underline{\mathbf{1}}^n$ dans $\boxplus''$. On obtient ainsi un objet cubique $\mathcal{Z}^c(X)$ de la catégorie des groupes abéliens. Le complexe simple associé $\mathrm{C}(\mathcal{Z}^c(X))$ est le complexe de cycles de Bloch (version cubique) dont les groupes de cohomologie sont les groupes de Chow supérieurs de X (cf. [9]).

Supposons que X est lisse et soit $\mathbf{w} = \{W_\alpha;\, \alpha \in A\}$ une collection finie de sous-schémas localement fermés de X. On définit un sous-groupe cubique $\mathcal{Z}^c_{\mathbf{w}}(X) \subset \mathcal{Z}^c(X)$ (qu'on notera $\mathcal{Z}^c_W(X)$ si $\mathbf{w} = \{W\}$ est un singleton) en prenant en degré $n \in \mathbb{N}$ le sous-groupe engendré par les $Z \subset X \times_k \mathbb{A}_k^n$ qui intersectent proprement les images des inclusions $W_\alpha \times_k \mathbb{A}_k^{n-i} \hookrightarrow X \times_k \mathbb{A}^n$ (pour $\alpha \in A$ et $0 \leq i \leq n$) composées de $W_\alpha \times_k \mathbb{A}_k^{n-i} \hookrightarrow X \times_k \mathbb{A}_k^{n-i}$ et de l'inclusion d'une face du schéma cocubique $X \times_k \mathbb{A}_k$. Le « lemme de déplacement » suivant est du à Bloch.

Théorème 2.133. *On suppose que X est affine et lisse et que les éléments de $\mathbf{w}$ sont des k-schémas lisses. Alors, l'inclusion $\mathcal{Z}^c_{\mathbf{w}}(X) \hookrightarrow \mathcal{Z}^c(X)$ induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés.*

Démonstration. Il s'agit de la version cubique d'un cas particulier de [28, Chapter 2, Theorem 3.5.14] qui s'en déduit aussitôt. □

Remarque 2.134. La preuve de [28, Chapter 2, Theorem 3.5.14] montre en fait que la conclusion du théorème 2.133 reste vraie sans l'hypothèse de lissité sur les éléments de $\mathbf{w}$. Toutefois, nous n'aurons pas besoin de cette généralité supplémentaire.

L'autre résultat essentiel dont on aura besoin est du à Suslin.

Théorème 2.135. *Soient X et U des k-schémas de type fini. On suppose que X est équidimensionel de dimension d et que U est lisse. Pour tout $0 \leq c \leq d$, l'inclusion évidente $\Gamma(U \times_k \mathbb{A}_k, z_{\mathrm{equi}}(X, d-c)) \hookrightarrow \mathcal{Z}^c(X \times_k U)$ induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés.*

Démonstration. Lorsque $U = \mathrm{Spec}(k)$, il s'agit de la version cubique de [32, Theorem 18.3, Corollary 18.5] qui s'en déduit aussitôt. Pour le cas général, on peut supposer que U est connexe de dimension p. Notre inclusion se factorise alors de la manière suivante :

$$\Gamma(U \times_k \mathbb{A}_k, z_{\mathrm{equi}}(X, d-c)) \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{A}_k, z_{\mathrm{equi}}(X \times_k U, p+d-c)) \hookrightarrow \mathcal{Z}^c(X \times_k U).$$

Or, la première inclusion induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés par le théorème 2.115. □

Le troisième résultat dont on aura besoin est le suivant.

Proposition 2.136. *Soient X un k-schéma de type fini et $c \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors, le morphisme d'objets cubiques $\mathcal{Z}^{c-1}(X) \oplus \mathcal{Z}^c(X) \to \mathcal{Z}^c(\mathbb{P}^1_k \times_k X)$, qui envoie un couple (Z_1, Z_2) sur $\{\infty\} \times_k Z_1 + \mathbb{P}^1_k \times_k Z_2$, induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés.*

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de [9, Theorem 7.1]. □

Dans la suite, il sera pratique d'étendre la formation des complexes de Bloch à d'autre k-schémas cocubiques que $X \times_k \mathbb{A}_k$, voire à certains objets r-cocubiques de la catégorie des pro-k-schémas.

Soit $c \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Pour X un k-schéma, on note $z^c(X)$ le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas fermés $Z \subset X$, intègres et de codimension c. Rappelons qu'un morphisme plat de k-schémas $f : Y \to X$ induit un homomorphisme $f^* : z^c(X) \to z^c(Y)$ qui à $Z \subset X$ associe la somme des composantes irréductibles de $f^{-1}(Z)$ comptées avec leurs multiplicités géométriques. Si $V = (V_i)_{i\in I}$ est un pro-k-schéma tel que les morphismes de transition $V_j \to V_i$ sont plats, on notera $z^c(V)$ la colimite filtrante des $z^c(V_i)$.

Supposons maintenant que X est lisse et soit $\mathbf{w} = \{W_\alpha; \alpha \in A\}$ une collection finie de sous-schémas localement fermés. On notera $z^c_{\mathbf{w}}(X)$ le sous-groupe abélien de $z^c(X)$ engendré par les $Z \subset X$ qui intersectent proprement les W_α. Alors, pour chaque $\alpha \in A$, on dispose d'un morphisme de pullback $i^*_\alpha : z^c_{\mathbf{w}}(X) \to z^c(W_\alpha)$ où $i_\alpha : W_\alpha \hookrightarrow X$ est l'inclusion évidente. Ceci s'étend aux pro-k-schémas de la manière suivante. Soit $V = (V_i)_{i\in I}$ un pro-k-schéma lisse tel que les morphismes de transition $V_j \to V_i$ sont plats et soit $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_i)_{i\in I}$ une famille où les $\mathbf{w}_i = \{W_{i,\alpha}; \alpha \in A_i\}$ sont des collections finies de sous-schémas localement fermés de V_i. On suppose que pour tout morphisme de transition $V_j \to V_i$ chaque élément de $\mathbf{w}_j$ est une composante irréductible de l'image inverse d'un élément de $\mathbf{w}_i$. Ceci assure que le morphisme de pullback $z^c(V_i) \to z^c(V_j)$ envoie $z^c_{\mathbf{w}_i}(V_i)$ dans $z^c_{\mathbf{w}_j}(V_j)$. Sous ces conditions, la colimite de $(z^c_{\mathbf{w}_i}(V_i))_{i\in I}$ sera notée $z^c_{\mathbf{w}}(V)$ et sera identifiée à un sous-groupe de $z^c(V)$.

Soit Q un objet r-cocubique de la catégorie des pro-k-schémas lisses qui associe à $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, le pro-$k$-schéma $Q(\mathbf{1}^{\underline{n}})$ donné par un système projectif $(Q_i(\mathbf{1}^{\underline{n}}))_{i\in I(\underline{n})}$. On supposera que Q satisfait aux conditions suivantes.

(i) Pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, les morphismes de transition $Q_j(\mathbf{1}^{\underline{n}}) \to Q_i(\mathbf{1}^{\underline{n}})$ du pro-k-schéma $Q(\mathbf{1}^{\underline{n}})$ sont plats.

(ii) Si $e : \mathbf{1}^{\underline{n}'} \to \mathbf{1}^{\underline{n}}$ est une flèche de $\boxplus''^r$ surjective sur chaque facteur, alors le morphisme de pro-k-schémas $Q(e)$ est pro-plat.

(Un morphisme de pro-schémas $f = (f_{ji})_{ji} : (W_j)_{j\in J} \to (V_i)_{i\in I}$ est dit pro-plat si pour tout i, on peut trouver des j, aussi fins que l'on veut, avec f_{ji} plat.)

Pour $a : \mathbf{1}^{\underline{m}} \hookrightarrow \mathbf{1}^{\underline{n}}$ une flèche dans $\boxplus^r$ injective sur chaque facteur, soit $F_i(a) \subset Q_i(\mathbf{1}^{\underline{n}})$ l'intersection des adhérences des images des morphismes $Q_j(\mathbf{1}^{\underline{m}}) \to Q_i(\mathbf{1}^{\underline{n}})$ qui définissent $Q(a)$. Notons $\mathbf{w}_i(\underline{n})$ l'ensemble des $F_i(a)$ lorsque a varie parmi les flèches de $\boxplus^r$ de but $\mathbf{1}^{\underline{n}}$ et injectives sur chaque facteur. Par la discussion ci-dessus, on dispose de sous-groupes $z^c_{\mathbf{w}(\underline{n})}(Q(\mathbf{1}^{\underline{n}})) \subset z^c(Q(\mathbf{1}^{\underline{n}}))$ et d'un morphisme de pullback

$$Q(a)^* : z^c_{\mathbf{w}(\underline{n})}(Q(\mathbf{1}^{\underline{n}})) \to z^c(Q(\mathbf{1}^{\underline{m}}))$$

(faisant intervenir la multiplicité d'intersection de Serre). On vérifie immédiatement que l'image de ce morphisme est contenue dans $z^c_{\mathbf{w}(\underline{m})}(Q(\mathbf{1}^{\underline{m}}))$. En utilisant d'autre part la condition (ii) ci-dessus, on obtient un groupe abélien r-cubique $\mathrm{Zy}^c(Q)$ tel que

$$\mathrm{Zy}^c(Q)(\mathbf{1}^{\underline{n}}) = z^c_{\mathbf{w}(\underline{n})}(Q(\mathbf{1}^{\underline{n}}))$$

pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^r$. Les résultats de cette section sont basés sur la proposition suivante.

Proposition 2.137. *Soient r un entier naturel non nul et X un k-schéma lisse équidimensionel de dimension d*

(a) *Pour $0 \leq c \leq d$, l'inclusion évidente*

$$\Gamma((\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r, z_{\text{equi}}(X, d-c)) \hookrightarrow \mathrm{Zy}^c(X \times_k (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r)$$

induit un quasi-isomorphisme après passage aux complexes totaux des complexes simples associés.

(b) *Pour tout $c \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$(\{\infty\} \times_k -, \mathbb{P}^1_k \times_k -) : \mathrm{Zy}^{c-1}(X \times_k (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r) \oplus \mathrm{Zy}^c(X \times_k (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r) \\ \to \mathrm{Zy}^c(\mathbb{P}^1_k \times_k X \times_k (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r)$$

induit un quasi-isomorphisme après passage aux complexes totaux des complexes simples associés.

Démonstration. La preuve consiste à déduire (a) (resp. (b)) du théorème 2.135 (resp. de la proposition 2.136). La méthode étant la même pour (a) et (b), on explique seulement (a). On a un diagramme commutatif de groupes abéliens $r+1$-cubiques enrichis

$$\begin{array}{ccc} \Gamma((\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r, z_{\text{equi}}(X, d-c)) & \longrightarrow & \mathrm{Zy}^c(X \times_k (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma((\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r \times_k \mathbb{A}_k, z_{\text{equi}}(X, d-c)) & \longrightarrow & \mathrm{Zy}^c(X \times_k (\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r \times_k \mathbb{A}_k), \end{array}$$

où les deux objets cubiques de la ligne supérieure sont constants par rapport à la dernière variable de $\boxplus''^{r+1}$ et où les flèches verticales sont induites par les projections évidentes. On montrera que les flèches verticales et la flèche horizontale inférieure induisent des quasi-isomorphismes après application de $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(-))$.

Pour la flèche verticale de droite, il suffit (par [47, Lemma 2.7.3]) de montrer que les morphismes

$$\mathrm{C}\big(\Gamma\big(\bar{\mathbb{D}}^{n_1}_{\text{ét}} \times_k \cdots \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_{r-1}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}, z_{\text{equi}}(X, d-c)\big)\big) \\ \to \mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}\big(\Gamma(\bar{\mathbb{D}}^{n_1}_{\text{ét}} \times_k \cdots \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_{r-1}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \mathbb{A}_k, z_{\text{equi}}(X, d-c))\big)\big)$$

sont des quasi-isomorphismes pour tout $(n_1, \ldots, n_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$. Ceci découle du lemme 2.122. De même, pour la flèche verticale de gauche, on se ramène à montrer que

$$\mathrm{C}\big(\mathrm{Zy}^c(X \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_1}_{\text{ét}} \times_k \cdots \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_{r-1}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})\big) \\ \to \mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}\big(\mathrm{Zy}^c(X \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_1}_{\text{ét}} \times_k \cdots \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_{r-1}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \mathbb{A}_k)\big)\big)$$

est un quasi-isomorphisme. On montre cela en adaptant la preuve du lemme 2.122. Enfin, pour la flèche horizontale inférieure, on se ramène (à l'aide de [47, Lemma 2.7.3]) à montrer que les morphismes

$$\mathrm{C}\big(\underline{\hom}(\bar{\mathbb{D}}^{n_1}_{\text{ét}} \times_k \cdots \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_r}_{\text{ét}} \times_k \mathbb{A}_k, z_{\text{equi}}(X, d-c))\big) \\ \hookrightarrow \mathrm{C}\big(\mathrm{Zy}^c(X \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_1}_{\text{ét}} \times_k \cdots \times_k \bar{\mathbb{D}}^{n_r}_{\text{ét}} \times_k \mathbb{A}_k)\big)$$

sont des quasi-isomorphismes pour $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$. Ceci découle des théorèmes 2.133 et 2.135. □

On note $\mathrm{Zy}^c((\mathbb{P}^1_k,\infty)\times_k X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r)$ le conoyau de

$$\{\infty\}\times_k - : \mathrm{Zy}^{c-1}(X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r)\to \mathrm{Zy}^c(\mathbb{P}^1_k\times_k X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r).$$

Plus généralement, on définit le groupe r-cubique $\mathrm{Zy}^c((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}\times_k X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r)$ par récurrence sur n en prenant le conoyau de

$$\begin{aligned}&\mathrm{Zy}^{c-1}\big((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n-1}\times_k\{\infty\}\times_k X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r\big)\\ &\quad\to \mathrm{Zy}^c\big((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n-1}\times_k\mathbb{P}^1_k\times_k X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r\big).\end{aligned}$$

La partie (b) de la proposition 2.137 et une récurrence immédiate entraîne le résultat suivant.

Corollaire 2.138. *Le morphisme*

$$(\mathbb{P}^1_k)^n\times_k - : \mathrm{Zy}^c(X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r)\to \mathrm{Zy}^c\big((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}\times_k X\times_k(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}/k)^r\big)$$

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes totaux des r-complexes simples associés.

En utilisant la proposition 2.137 (a) et le corollaire 2.138, on obtient un zigzag de quasi-isomorphismes

$$\begin{aligned}\Lambda[2]&\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{P}^1_k))=\mathrm{C}\big(\Gamma(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}},z_{\mathrm{equi}}((\mathbb{P}^1_k,\infty),0)\otimes\Lambda)\big)\\ &\to\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^1((\mathbb{P}^1_k,\infty)\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))\leftarrow\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^1(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})).\end{aligned}$$

L'image de $1\in\Lambda$ par ce zigzag est un élément de $\mathrm{H}_2(\mathrm{Zy}^1(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})(\underline{\mathbf{1}}^2))$ dont on choisit un représentant $\tilde{\alpha}\in\mathrm{Zy}^1(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})(\underline{\mathbf{1}}^2)$ vérifiant $\mathrm{d}^*_{i,\epsilon}(\tilde{\alpha})=0$ pour $(i,\epsilon)\in\{1,2\}\times\{0,1\}$. On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.139. (a) *Le complexe $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ est canoniquement isomorphe, dans $\mathbf{D}(\Lambda)$, à la colimite de la $\mathbb{N}$-suite*

$$\mathcal{S}'^{\,\mathrm{eff}}_{\mathrm{I}}=\big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})\otimes\Lambda)\big)[-2n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Le morphisme de transition $n\to n+1$ envoie un cycle $\beta\in\mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ sur le pullback de $\tilde{\alpha}\boxtimes\beta$ par le morphisme $\bar{\mathbb{D}}^{2+p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}$.

(b) *Le complexe $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ est canoniquement isomorphe, dans $\mathbf{D}(\Lambda)$, à la colimite de la $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-suite*

$$\mathcal{S}'_{\mathrm{I}}=\big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^{m+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})\otimes\Lambda)\big)[-2m-2n]\big\}_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n)\to(m+1,n)$ et $(m,n)\to(m,n+1)$ envoient $\beta\in\mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ sur les pullbacks de $\beta\boxtimes\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}\boxtimes\beta$ par

$$\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q+2}_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}\quad et\quad \bar{\mathbb{D}}^{2+p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}}$$

respectivement.

Démonstration. On obtiendra la partie (a) (resp. (b)) de l'énoncé à partir de la partie (a) (resp. (b)) du théorème 2.124. La méthode étant la même dans les deux cas, on traitera uniquement la partie (a) de l'énoncé.

Par la proposition 2.137 (a), le système inductif $\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{eff}}$ (cf. théorème 2.124 (a)) est quasi-isomorphe terme à terme avec le système inductif

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\prime\prime\,\mathrm{eff}} = \big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^n((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}) \otimes \Lambda)\big)[-2n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Le morphisme de transition $n \to n+1$ envoie un cycle $\beta \in \mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n((\mathbb{P}^1_k,\infty)^{\wedge n}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ sur le pullback de $\mathrm{graph}(\alpha) \boxtimes \beta$ par la composition de

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}^1_k)^{1+n} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2+p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} &\to \mathbb{P}^1_k \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \\ &\xrightarrow[\sim]{\tau} \mathbb{P}^1_k \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}} \times_k (\mathbb{P}^1_k)^n \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}.\end{aligned}$$

(Ci-dessus, $\mathrm{graph}(\alpha)$ est le graphe de correspondance finie α vu comme un élément de $z^1(\mathbb{P}^1_k \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}})$.) Clairement, on ne change pas la colimite homotopique du système inductif $\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\prime\prime\,\mathrm{eff}}$ en remplaçant le cycle $\mathrm{graph}(\alpha)$ par un cycle homologue, notamment $\mathbb{P}^1_k \times_k \tilde{\alpha}$. Avec, ce changement, on obtient le système inductif ${}^{\backprime}\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\prime\prime\,\mathrm{eff}}$. Clairement, on a un morphisme canonique de systèmes inductifs $\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\prime\,\mathrm{eff}} \to {}^{\backprime}\mathcal{S}_{\mathrm{I}}^{\prime\prime\,\mathrm{eff}}$ qui est un quasi-isomorphisme termes à termes par le corollaire 2.138. □

Nous allons maintenant décrire la multiplication de $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$. Pour cela, on a besoin du résultat ci-dessous qui s'obtient à partir du lemme 2.125 en adaptant la méthode utilisée dans la preuve du théorème 2.139 (a).

Lemme 2.140. (a′) *Le complexe* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{II}}^{\prime\,\mathrm{eff}} = \big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}) \otimes \Lambda)\big)[-2n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Le morphisme de transition $n \to n+1$ *envoie un cycle* $\beta \in \mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *sur le pullback de* $\beta \boxtimes \tilde{\alpha}$ *par la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \xrightarrow[\sim]{\tau} \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}}.$$

(a″) *Le complexe* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{III}}^{\prime\,\mathrm{eff}} = \big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^{m+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}) \otimes \Lambda)\big)[-2m-2n]\big\}_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n) \to (m+1,n)$ *et* $(m,n) \to (m,n+1)$ *envoient* $\beta \in \mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *sur les pullbacks de* $\tilde{\alpha} \boxtimes \beta$ *par la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \xrightarrow[\sim]{\tau} \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}$$

et le morphisme

$$\bar{\mathbb{D}}^{2+p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}$$

respectivement.

Proposition 2.141. *Modulo l'isomorphisme dans le théorème* 2.139 (a) *et ses variantes dans* (a′) *et* (a″) *du lemme* 2.140*, la multiplication de l'algèbre* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est induite par le morphisme de* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suites* $\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{I}}\otimes\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{II}}\to\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{III}}$ *qui envoie un tenseur* $\gamma\otimes\beta$*, avec* $\beta\in\mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^m(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *et* $\gamma\in\mathrm{C}_{r,s}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$*, sur le pullback de* $\gamma\boxtimes\beta$ *par la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}^{r+p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{s+q}_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^{r}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{s}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\xrightarrow[\sim]{\tau}\bar{\mathbb{D}}^{r}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{s}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 2.126 et de la méthode employée pour déduire l'isomorphisme du théorème 2.139 (a) et ses variantes à partir de l'isomorphisme du théorème 2.124 (a) et ses variantes. □

Corollaire 2.142. *Supposons que* Λ *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre. Considérons la* $\mathbb{N}$*-suite*

$${}^{\mathrm{a}}\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}=\big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{A}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})\otimes\Lambda)\big)[-2n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}$$

où le morphisme de transition $n\to n+1$ *envoie* $\beta\in\mathrm{A}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *sur la classe du pullback de* $\tilde{\alpha}\boxtimes\beta$ *par le morphisme* $\bar{\mathbb{D}}^{2+p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}$*. Alors, la colimite du système* ${}^{\mathrm{a}}\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}$ *est une algèbre commutative de la catégorie* $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$*. Sa multiplication associe à un couple* (γ,β)*, avec* $\beta\in\mathrm{A}_{p,q}(\mathrm{Zy}^m(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *et* $\gamma\in\mathrm{A}_{r,s}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$*, la classe du pullback to* $\gamma\boxtimes\beta$ *par la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}^{r+p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{s+q}_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^{r}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{s}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\xrightarrow[\sim]{\tau}\bar{\mathbb{D}}^{r}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{s}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}.$$

Enfin, en tant qu'algèbres dans $\mathbf{D}(\Lambda)$*,* $\mathcal{H}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, à la colimite de* ${}^{\mathrm{a}}\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}$*.*

Démonstration. Il s'agit de remarquer que les ind-objets $\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{II}}$ et $\mathcal{S}'^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{III}}$ deviennent isomorphes lorsqu'on utilise les complexes alternés associés au lieu des complexes simples associés. □

On passe maintenant à la description de la comultiplication de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma)$. Comme pour la multiplication, il s'agit de transporter le résultat correspondant de la section 2.3.3. On commence par l'analogue du lemme 2.127.

Lemme 2.143. (b′) *Le complexe* $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *est canoniquement isomorphe, dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$*, à la colimite de la* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-suite*

$$\mathcal{S}'_{\mathrm{I}}=\big\{\mathrm{Tot}\big(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^{m+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})\otimes\Lambda)\big)[-2m-2n]\big\}_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n)\to(m+1,n)$ *et* $(m,n)\to(m,n+1)$ *envoient* $\beta\in\mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^n(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *sur les pullbacks de* $\beta\boxtimes\tilde{\alpha}$ *par le morphisme*

$$\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q+2}_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}}$$

et la composition de

$$\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\to\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\xrightarrow[\sim]{\tau}\bar{\mathbb{D}}^{p}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{q}_{\text{ét}}\times_k\bar{\mathbb{D}}^{2}_{\text{ét}}$$

respectivement.

Il existe une $\mathbb{N}^4$-suite

$$\mathcal{T}' = \{\mathrm{Tot}(\mathrm{C}(\mathrm{Zy}^{m+n+u+v}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}) \otimes \Lambda))[-2m-2n-2u-2v]\}_{m,n,u,v \in \mathbb{N}}.$$

Les morphismes de transition $(m,n,u,v) \to (m+1,n,u,v)$, $(m,n,u,v) \to (m,n+1,u,v)$, $(m,n,u,v) \to (m,n,u+1,v)$ et $(m,n,u,v) \to (m,n,u,v+1)$ envoient un cycle

$$\beta \in \mathrm{C}_{p,q,r}(\mathrm{Zy}^{m+n+u+v}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$$

(avec $p,\ q,\ r \in \mathbb{N}$) respectivement sur le pullback de

- $\beta \boxtimes \tilde{\alpha}$ par le morphisme

$$\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{r+2}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}},$$

- $\beta \boxtimes \tilde{\alpha}$ par la composition de

$$\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \xrightarrow[\sim]{\tau} \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}},$$

- $\tilde{\alpha} \boxtimes \beta$ par la composition de

$$\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{2+q}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \xrightarrow[\sim]{\tau} \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}},$$

- $\tilde{\alpha} \boxtimes \beta$ par la composition de

$$\bar{\mathbb{D}}^{p+2}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}} \xrightarrow[\sim]{\tau} \bar{\mathbb{D}}^2_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^r_{\text{ét}}.$$

On peut maintenant énoncer notre description de la comultiplication de $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$.

Théorème 2.144. (a) *Il existe un morphisme d'ind-objets* $\eta' : \mathcal{S}'_{\mathrm{II}} \to \mathcal{T}'$ *qui, sur les ensembles d'indices, est donné par l'application* $(m,n) \in \mathbb{N}^2 \rightsquigarrow (m,0,0,n)$ *et qui applique identiquement le facteur direct* $\mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^{m+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})) \otimes \Lambda$ *(avec* $p,\ q \in \mathbb{N}$*) sur le facteur direct* $\mathrm{C}_{p,0,q}(\mathrm{Zy}^{m+0+0+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}})) \otimes \Lambda$.

(b) *Il existe un morphisme d'ind-objets* $\phi' : \mathcal{S}'_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{S}'_{\mathrm{II}} \to \mathcal{T}'$. *Sur les ensembles d'indices,* ϕ *est donné par l'application* $((m',n'),(m,n)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \rightsquigarrow (m',m,n',n)$. *Il envoie un tenseur* $\beta' \otimes \beta$, *avec* $\beta \in \mathrm{C}_{p,q}(\mathrm{Zy}^{m+n}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$ *et* $\beta' \in \mathrm{C}_{p',q'}(\mathrm{Zy}^{m'+n'}(\bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}_{\text{ét}}))$, *sur le pullback de* $\beta \boxtimes \beta'$ *par la composition de*

$$\bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p'+q}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}} \to \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p'}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}} \xrightarrow[\sim]{\tau} \bar{\mathbb{D}}^p_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^q_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{p'}_{\text{ét}} \times_k \bar{\mathbb{D}}^{q'}_{\text{ét}}.$$

(c) *Le morphisme* $\phi' : \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^2}\ \mathcal{S}'_{\mathrm{I}} \otimes \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^2}\ \mathcal{S}'_{\mathrm{II}} \to \mathrm{colim}_{\mathbb{N}^4}\ \mathcal{T}'$ *est inversible dans* $\mathbf{D}(\Lambda)$ *et la composition de*

$$\operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}'_{\mathrm{II}} \xrightarrow{\eta'} \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^4} \mathcal{T}' \xrightarrow[\sim]{\phi'^{-1}} \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}'_{\mathrm{I}} \otimes \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathcal{S}'_{\mathrm{II}}$$

coïncide avec la comultiplication de la bialgèbre $\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(k,\sigma,\Lambda)$ *modulo les isomorphismes du théorème* 2.139 (b) *et du lemme* 2.143 (b′).

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 2.132 et de la méthode employée pour déduire les isomorphismes du théorème 2.139 (b) et du lemme 2.143 (b′) à partir de ceux du théorème 2.124 (b) et du lemme 2.127 (b′). □

2.4. Deux conjectures. On propose ici deux conjectures inspirées de l'étude de la réalisation de Betti entreprise dans cet article. Ces conjectures sont suffisamment fortes pour entraîner une grande partie des propriétés conjecturales des motifs de Voevodsky, notamment la conservation de la réalisation de Betti (cf. proposition 2.148) et la conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé (cf. proposition 2.150). Il est aussi probable, mais nous n'avons pas vérifié tous les détails, qu'on puisse déduire formellement de nos deux conjectures l'existence d'une t-structure motivique sur $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ et même l'équivalence de catégories entre la sous-catégorie des objets compacts de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ et la catégorie dérivée (des complexes bornés) de celle des représentations de dimension finie du groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\text{mot}}(k,\sigma)$.

Dans cette section, on travaillera à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et on omettra de mentionner l'anneau des coefficients. La première conjecture est la suivante.

Conjecture A. *L'homologie du complexe $\mathscr{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma)$ est nulle sauf en degré zéro.*

La conjecture A entraîne aussitôt l'énoncé similaire pour $\mathscr{H}_{\text{mot}}(k,\sigma)$ (utiliser le théorème 2.14). Elle découle de l'existence d'une t-structure motivique.

Lemme 2.145. *Supposons qu'il existe une t-structure sur $\mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(k)$ qui rend le foncteur de réalisation $\mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét},*} : \mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(k) \to \mathbf{D}(\mathbb{Q})$ t-exact. Alors, la conjecture* A *est vraie.*

Démonstration. Par le corollaire 2.105, on sait que $\mathscr{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma)$ est (-1)-connexe. Il reste donc à voir que l'homologie de $\mathscr{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma)$ est nulle en degrés homologiques strictement positifs. Puisque $\mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét},*}$ est t-exact, son adjoint à droite $\mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét}}_*$ préserve les objets t-négatifs (la terminologie utilisée est celle de [4, définition 2.1.74]). En particulier, $\mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét}}_*\mathbb{Q}$ est un objet t-négatif de $\mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(k)$. En utilisant une deuxième fois la t-exactitude de $\mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét},*}$, on déduit que le complexe $\mathscr{H}^{\text{eff}}_{\text{mot}}(k,\sigma) = \mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét},*}\mathsf{Bti}^{\text{eff},\text{ét}}_*\mathbb{Q}$ est t-négatif, i.e., son homologie est concentrée en dégrés homologiques négatifs. □

Notre deuxième conjecture est une propriété de *descente* le long de la réalisation de Betti. En gros, elle affirme qu'on peut reconstruire un motif compact $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ comme la limite homotopique du motif cosimplicial $\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta} \rightsquigarrow (\mathsf{Bti}^{\text{ét}}_*\mathsf{Bti}^{\text{ét},*})^{\circ n+1}(M)$ obtenu à l'aide de la monade $\mathsf{Bti}^{\text{ét}}_*\mathsf{Bti}^{\text{ét},*}$ associée au couple de foncteurs adjoints $(\mathsf{Bti}^{\text{ét},*}, \mathsf{Bti}^{\text{ét}}_*)$. Pour donner un sens précis à un tel énoncé on peut recourir à l'endofoncteur $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}$ défini dans la section 2.2.5.

Notons $\mathbf{\Delta}^+ \subset \mathbf{\Delta}$ la sous-catégorie de la catégorie des ordinaux $\underline{\mathbf{n}} = \{0 < \cdots < n\}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) où l'on ne retient que les applications strictement croissantes. On considère l'objet semi-cosimplicial qui à $\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+$ associe l'endofoncteur composé $(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}$ et dont la face associée à $\mathrm{d}_i : \underline{\mathbf{n-1}} \to \underline{\mathbf{n}}$, avec $0 \leq i \leq n$, est donnée par

$$\begin{aligned}(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n} &= (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ i} \circ \mathrm{id} \circ (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n-i} \\ &\to (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ i} \circ \mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}} \circ (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n-i}.\end{aligned}$$

Bien entendu, cette construction est valable pour tout endofoncteur F munie d'une transformation naturelle (une augmentation) $\mathrm{id} \to F$. Notre deuxième conjecture s'énonce alors de la manière suivante.

Conjecture B. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T_k*-spectre symétrique stablement projectivement* $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$*-fibrant. On suppose que* $\mathbf{E}$ *est un objet compact de* $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$*. Alors, le morphisme évident*

$$\mathbf{E} \to \operatorname*{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{E}) \tag{85}$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$*.*

Remarque 2.146. Explicitons le contenu de la conjecture B. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le T_k-spectre symétrique $(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{E})$ est projectivement stablement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant. Le calcul de $\operatorname{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{E})$ se fait alors niveau par niveau et sur les préfaisceaux. De plus, le T_k-spectre symétrique ainsi obtenu est encore stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant. En particulier, le morphisme (85) est inversible dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ si et seulement s'il est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux niveau par niveau. Ainsi, au niveau $e \in \mathbb{N}$, on est ramené à identifier, à quasi-isomorphisme près, le complexe $\mathbf{E}_e$ avec

$$\operatorname*{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} \Big(\operatorname*{colim}_{r_0, \ldots, r_n \in \mathbb{N}^{n+1}} \big((\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}})^{\circ n+1} (\mathbf{E}_{e+r_0+\cdots+r_n})[-2(r_0 + \cdots + r_n)] \big) \Big). \tag{86}$$

Les morphismes de transition de la colimite ci-dessus sont induits par la transformation naturelle ϑ de la définition 2.65 (i). Par ailleurs, la limite homotopique dans (86) est « facile » à calculer. Plus généralement, soit $\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+ \rightsquigarrow R(\underline{\mathbf{n}})$ un objet semi-cosimplicial de la catégorie des complexes de préfaisceaux et supposons que tous les $R(\underline{\mathbf{n}})$ sont projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrants. Pour calculer $\operatorname{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} R$, on forme d'abord le bicomplexe $\mathrm{C}(R)$ associé à R. En indexation cohomologique, la n-ième ligne $\mathrm{C}^n(R)$ est donnée par le complexe $R^\bullet(\underline{\mathbf{n}})$ et la différentielle verticale partante de $R^\bullet(\underline{\mathbf{n-1}})$ est la somme alternée $\sum_{i=0}^n (-1)^i \mathrm{d}_{i*}$. Le complexe $\operatorname{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} R$ est alors simplement le complexe total $\mathrm{Tot}^{\prod}(\mathrm{C}^\bullet(R^\bullet))$ donné en degré $n \in \mathbb{Z}$ par $\prod_{i+j=n} \mathrm{C}^i(R^j)$. Le foncteur $\mathrm{Tot}^{\prod}(-)$ est différent du foncteur $\mathrm{Tot}(-)$ utilisé partout ailleurs dans le texte. Il est défini en prenant des produits directs au lieu de prendre des sommes directes.

Rappelons que $\mathbf{S}^{\text{tr}}_T$ est le T_k-spectre donné en degré m par $\mathbb{Q}_{\text{tr}}((\mathbb{P}^1_k, \infty)^{\wedge m})$ (sur lequel on a oublié la structure de transferts). On a la réduction suivante.

Lemme 2.147. *La conjecture* B *est vraie si elle est vérifiée pour* $\mathbf{E} = \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$ *(cf. proposition* 2.114*).*

Démonstration. Soient $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ des T_k-spectres symétriques, et supposons que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont projectivement cofibrants, et que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrants. On suppose donné un morphisme $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ qui est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable. On a alors un morphisme d'objets semi-cosimpliciaux donné par les morphismes (cf. théorème 2.85)

$$\mathbf{E} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{F}) \to (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{G}). \tag{87}$$

Par le corollaire 2.86 (et une récurrence facile), les morphismes (87) sont des équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales stables. En passant aux limites homotopiques, on déduit alors un isomorphisme dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$:

$$\operatorname*{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} \mathbf{E} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{holim}_{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{G}). \tag{88}$$

Lorsque $\mathbf{E}$ est un motif compact, l'endofoncteur $\mathbf{E} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} -$ de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ est isomorphe à $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{E}, \Lambda(0)), -)$. Il commute donc aux limites homotopiques. En utilisant (88), on déduit aussitôt que le morphisme canonique

$$\mathbf{E} \overset{\mathsf{L}}{\otimes} \underset{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+}{\operatorname{holim}} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{F}) \to \underset{\underline{\mathbf{n}} \in \mathbf{\Delta}^+}{\operatorname{holim}} (\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\mathbf{G})$$

est inversible dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$. Il est maintenant clair que la conjecture B est vraie pour $\mathbf{G}$ si elle est vraie pour $\mathbf{F}$. On obtient le résultat recherché en prenant pour $\mathbf{F}$ un T_k-spectre symétrique projectivement cofibrant muni qu'un quasi-isomorphisme niveau par niveau vers $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$. □

Voici deux conséquences importantes de la conjecture B.

Proposition 2.148. *Supposons que la conjecture* B *est vraie. Alors, le foncteur* $\mathsf{Bti}^{\text{ét},*} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k) \to \mathbf{D}(\mathbb{Q})$*, restreint à la sous-catégorie des objets compacts, est conservatif.*

Démonstration. Soit $\mathbf{E}$ un T_k-spectre symétrique stablement projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant tel que $\mathsf{Bti}^{\text{ét},*}(\mathbf{E}) \simeq 0$. Il s'ensuit que $\mathsf{Bti}^*(\mathsf{R}\, o_{\text{ét}}\, \mathbf{E}) \simeq 0$. Par le théorème 2.67, $\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}}(\mathbf{E})$ est alors quasi-isomorphe au complexe nul niveau par niveau. Il en est donc de même de la limite homotopique dans (85). Si $\mathbf{E}$ est compact, la conjecture B entraîne que $\mathbf{E}$ est nul. □

Remarque 2.149. La preuve de la proposition 2.148 montre que la réalisation de Betti est conservative sur la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ formée des T_k-spectres symétriques vérifiant la conclusion de la conjecture B (après remplacement stablement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant). Or, il est facile de construire des motifs $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k)$ non compacts tels que $\mathsf{Bti}^{\text{ét},*}(M) \simeq 0$. Ceci montre que la conclusion de la conjecture B est en général fausse sans l'hypothèse de compacité sur $\mathbf{E}$.

Proposition 2.150. *Supposons que les conjectures* A *et* B *sont vraies. Alors, la conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé est vraie.*

Démonstration. Rappelons que la conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé prédit que les complexes motiviques $\mathbb{Q}(r) = \underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbb{Q}_{\text{tr}}((\mathbb{P}^1_k)^{\wedge r}))[-2r]$ n'ont pas de cohomologie en degrés strictement négatifs. Autrement dit, la cohomologie du T_k-spectre symétrique $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T)$ en niveau $r \in \mathbb{N}$ est nulle en degrés cohomologiques strictement inférieurs à $-2r$. Par la conjecture B, il suffit de vérifier cette propriété pour chacun des T_k-spectres symétriques $(\mathbf{Sing}^{\mathbb{D},\infty}_{\text{ét}})^{\circ n+1}(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{A}}(\mathbf{S}^{\text{tr}}_T))$ (avec $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème 2.67, ce spectre est isomorphe dans $\mathbf{DA}(k)$ à

$$(\mathsf{Bti}_*\mathsf{Bti}^*)^{\circ n+1}(\mathbb{Q}(0)) \simeq \mathsf{Bti}_*(\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma)^{\otimes n}) \simeq \mathsf{Bti}_*\mathbb{Q} \otimes (\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma)^{\otimes n})_{\text{cst}}.$$

Par la conjecture A, le complexe $\mathcal{H}_{\text{mot}}(k,\sigma)^{\otimes n}$ est concentré en degré zéro. Or, en niveau $r \in \mathbb{N}$, le T_k-spectre symétrique $\mathsf{Bti}_*\mathbb{Q}$ est donné par $\mathsf{Bti}^{\text{eff}}_*\mathbb{Q}[2r]$ et la cohomologie de $\mathsf{Bti}^{\text{eff}}_*\mathbb{Q}$ est nulle en degrés strictement négatifs. □

A. Objets (co-)cubiques et objets (co-)cubiques enrichis

Pour la commodité du lecteur, on rappelle dans cette annexe la notion classique d'objets cubiques et la construction du complexe simple associé à un objet cubique dans une catégorie additive. On introduit également les objets cubiques enrichis et les objets cubiques enrichis symétriques. Ces objets sont considérés sous différents noms dans [11, 18]. Le lecteur pourra également consulter le début de [30].

A.1. Objets cubiques et complexes simples associés. Rappelons la définition d'un objet (co-)cubique.

Définition A.1. On note $\boxplus$ la sous-catégorie de la catégorie des ensembles finis ayant pour objets les ensembles $\underline{\mathbf{1}}^n = \{0,1\}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et qui est engendrée par

(i) les faces $\mathrm{d}_{i,\epsilon} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n+1}$ avec
$$\mathrm{d}_{i,\epsilon}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},\epsilon,x_i,\dots,x_n)$$
pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n+1$ et $\epsilon \in \{0,1\}$,

(ii) les projections $\mathrm{p}_i : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n-1}$ avec
$$\mathrm{p}_i(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$$
pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $1 \leq i \leq n$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet cocubique* (resp. *cubique*) de $\mathcal{C}$ est un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\boxplus$ dans $\mathcal{C}$.

Exemple A.2. Soit k un corps. On dispose d'un objet cocubique $\mathbb{A}_k^\bullet$ qui associe à $\underline{\mathbf{1}}^n \in \boxplus$ le k-schéma $\mathbb{A}_k^n = \mathrm{Spec}(k[t_1,\dots,t_n])$. Pour tout k-schéma S, les morphismes $\mathrm{d}_{i,\epsilon} : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^{n+1}$ et $\mathrm{p}_i : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^{n-1}$ sont donnés sur les S-points par les formules dans (i) et (ii) de la définition A.1 (avec 0 et 1 le zéro et l'unité de l'anneau $\hom_k(S,\mathbb{A}_k^1)$).

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive karoubienne et $Q : \boxplus^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un objet cubique de $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{C}_\bullet^\sharp(Q)$ le complexe de $\mathcal{C}$ concentré en degrés homologiques positifs et défini de la manière suivante.

(i) Pour $n \geq 0$, $\mathrm{C}_n^\sharp(Q) = Q(\underline{\mathbf{1}}^n)$.

(ii) Pour $n \geq 1$, la différentielle $\mathrm{C}_n^\sharp(Q) \to \mathrm{C}_{n-1}^\sharp(Q)$ est la somme alternée
$$\sum_{i=1}^n (-1)^i(\mathrm{d}_{i,1}^* - \mathrm{d}_{i,0}^*).$$

Lemme A.3. *Le complexe $\mathrm{C}_\bullet^\sharp(Q)$ se décompose en une somme directe de sous-complexes $\mathrm{C}_\bullet^\sharp(Q) = \mathrm{C}_\bullet(Q) \oplus \mathrm{D}_\bullet(Q)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

(a) $\mathrm{C}_n(Q)$ *est le noyau du morphisme* $\prod_i \mathrm{d}_{i,0}^* : \mathrm{C}_n^\sharp(Q) \to \prod_{i=1}^n \mathrm{C}_{n-1}^\sharp(Q)$,

(b) $\mathrm{D}_n(Q)$ *est l'image du morphisme* $\cup_i \mathrm{p}_i^* : \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{C}_{n-1}^\sharp(Q) \to \mathrm{C}_n^\sharp(Q)$.

Démonstration. Il s'agit d'un fait standard. Le preuve est omise. □

Définition A.4. Soit Q un objet cubique d'une catégorie additive et karoubienne $\mathcal{C}$. Le complexe $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ du lemme A.3 est appelé le *complexe simple* associé à Q.

Remarque A.5. Pour $n \geq 1$, la différentielle $d : \mathrm{C}_n(Q) \to \mathrm{C}_{n-1}(Q)$ du complexe simple associé à Q est égale à la somme alternée $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mathrm{d}_{i,1}^*$.

A.2. Objets cubiques enrichis et complexes normalisés associés. Les objets (co-)cubiques considérés dans le corps du texte sont en fait des objets (co-)cubiques enrichis au sens de la définition suivante.

Définition A.6. On note $\boxplus'$ la sous-catégorie de la catégorie des ensembles finis ordonnés ayant pour objets les ensembles $\underline{\mathbf{1}}^n = \{0,1\}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et qui est engendrée par les applications dans (i) et (ii) de la définition A.1, ainsi que

(iii) les multiplications $\mathrm{m}_i : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n-1}$ avec

$$\mathrm{m}_i(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n)$$

avec $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $1 \leq i \leq n-1$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet cocubique* (resp. *cubique*) *enrichi* dans $\mathcal{C}$ est un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\boxplus'$ dans $\mathcal{C}$.

On a une inclusion évidente $\boxplus \hookrightarrow \boxplus'$ de sorte qu'un objet (co-)cubique enrichi induit par restriction un objet (co-)cubique au sens de la définition A.1. Réciproquement, étant donné un objet (co-)cubique Q, un *enrichissement* de Q est un relèvement du foncteur Q à $\boxplus'$.

Exemple A.7. L'objet cocubique $\mathbb{A}_k^\bullet$ admet un enrichissement naturel tel que $\mathrm{m}_i : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^{n-1}$ est donné sur les anneaux de fonctions par l'association

$$t_k \rightsquigarrow \begin{cases} t_k & \text{si } k < i, \\ t_i t_{i+1} & \text{si } k = i, \\ t_{k+1} & \text{si } k > i. \end{cases}$$

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive karoubienne et $Q : \boxplus'^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un objet cubique enrichi de $\mathcal{C}$. On note encore $\mathrm{C}_\bullet^\sharp(Q)$, $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ et $\mathrm{D}_\bullet(Q)$ les complexes du lemme A.3 obtenus à partir de la restriction de Q à $\boxplus$. Il est facile de voir que les morphismes $\mathrm{m}_i^* : \mathrm{C}_{n-1}^\sharp(Q) \to \mathrm{C}_n^\sharp(Q)$ préservent la décomposition $\mathrm{C}_\bullet^\sharp(Q) = \mathrm{C}_\bullet(Q) \oplus \mathrm{D}_\bullet(Q)$. On peut d'ailleurs utiliser ces morphismes pour raffiner cette décomposition. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition A.8. *Gardons les hypothèses précédentes. Le complexe simple* $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ *associé à l'objet cubique enrichi* Q *se décompose en une somme directe de sous-complexes* $\mathrm{C}_\bullet(Q) = {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(Q) \oplus \mathrm{D}'_\bullet(Q)$ *(resp.* $\mathrm{C}_\bullet(Q) = {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(Q) \oplus \mathrm{D}'_\bullet(Q)$*) telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

(a) ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_n(Q)$ *(resp.* ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_n(Q)$*) est le noyau du morphisme* $\prod_i \mathrm{d}_{i,1}^* : \mathrm{C}_n(Q) \to \prod_{i=2}^{n} \mathrm{C}_{n-1}(Q)$ *(resp.* $\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}(Q)$*),*

(b) $\mathrm{D}'_n(Q)$ *est l'image du morphisme* $\cup_i \mathrm{m}_i^* : \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}(Q) \to \mathrm{C}_n(Q)$.

Démonstration. Il s'agit de l'analogue cubique de [17, Theorem 2.1]. La preuve est omise. □

Remarque A.9. Pour $n \geq 1$, la différentielle $d : {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_n(Q) \to {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_{n-1}(Q)$ (resp. $d : {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_n(Q) \to {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_{n-1}(Q)$) est égale à $-\mathrm{d}^*_{1,1}$ (resp. $(-1)^n \mathrm{d}^*_{n,1}$).

Soit Q un objet cubique enrichi d'une catégorie additive karoubienne. La proposition A.8 entraîne que le quotient $\mathrm{N}_\bullet(Q) = \mathrm{C}_\bullet(Q)/\,\mathrm{D}'_\bullet(Q)$ existe dans la catégorie des complexes. De plus, on a des isomorphismes canoniques

$$ {}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(Q) \simeq \mathrm{N}_\bullet(Q) \simeq {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(Q). $$

Définition A.10. Soit Q un objet cubique enrichi d'une catégorie additive karoubienne. Le complexe $\mathrm{N}_\bullet(Q)$ est appelé le *complexe normalisé* associé à Q.

Par abus de langage, les complexes ${}^{\mathrm{g}}\mathrm{N}_\bullet(Q)$ et ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(Q)$ seront aussi appelés les complexes normalisés associés à Q.

Proposition A.11. *Gardons les hypothèses et les notations de la proposition* A.8 *et supposons de plus que* $\mathcal{C}$ *est une catégorie abélienne. La projection* $\mathrm{C}_\bullet(Q) \twoheadrightarrow \mathrm{N}_\bullet(Q)$ *est un quasi-isomorphisme et* $\mathrm{D}'_\bullet(Q)$ *est contractile.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'inclusion ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q)$ est un quasi-isomorphisme. Pour $j \geq 0$ un entier naturel, on considère le sous-complexe ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_\bullet(Q) \subset \mathrm{C}_\bullet(Q)$ donné en degré $n \in \mathbb{N}$ par le noyau de $\prod_i \mathrm{d}^*_{i,1} : \mathrm{C}_n(Q) \to \prod_{i=1}^{\min(j,n-1)} \mathrm{C}_{n-1}(Q)$. Clairement, l'inclusion ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}_\bullet(Q) \hookrightarrow {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_\bullet(Q)$ induit un isomorphisme en homologie en degré plus petit que $j+1$. Il suffit donc de montrer que les inclusions $u^{(j)} : {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j+1)}_\bullet(Q) \hookrightarrow {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_\bullet(Q)$ sont des équivalences d'homotopie. Les morphismes

$$ f^{(j)}_n : {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_n(Q) \to {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j+1)}_n(Q), \qquad f^{(j)}_n = \begin{cases} \mathrm{id} - \mathrm{m}^*_{j+1}\,\mathrm{d}^*_{j+1,1} & \text{si } n \geq j+2, \\ \mathrm{id} & \text{si } 0 \leq n \leq j+1, \end{cases} $$

définissent un morphisme de complexes $f^{(j)}_\bullet : {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_\bullet(Q) \to {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j+1)}_\bullet(Q)$. Clairement, $f^{(j)}_\bullet \circ u^{(j)}_\bullet$ est l'identité de ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j+1)}_\bullet(Q)$. Par ailleurs, il est facile de voir que $\mathrm{id} - u^{(j)}_\bullet \circ f^{(j)}_\bullet$ est homotope à zéro. Une telle homotopie est donnée (aux signes près) par les morphismes $\mathrm{m}^*_{j+1} : {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_{n-1}(Q) \to {}^{\mathrm{d}}\mathrm{N}^{(j)}_n(Q)$ lorsque $n \geq j+2$ et par les morphismes nuls lorsque $n \leq j+1$. □

A.3. Objets cubiques Σ-enrichis et complexes alternés associés. Les objets (co-)cubiques enrichis considérés dans le corps du texte sont en fait des objets (co-)cubiques Σ-enrichis au sens de la définition suivante.

Définition A.12. On note $\boxplus''$ la sous-catégorie de la catégorie des ensembles finis ordonnés ayant pour objets les ensembles $\underline{\mathbf{1}}^n = \{0,1\}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, et qui est engendrée par les applications dans (i) et (ii) de la définition A.1, les application dans (iii) de le définition A.6, ainsi que

(iv) les permutations des facteurs donnée par $\sigma : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n-1}$ avec

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_n$ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet cocubique* (resp. *cubique*) Σ-*enrichi* dans $\mathcal{C}$ est un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\boxplus''$ dans $\mathcal{C}$.

Clairement un objet (co-)cubique Σ-enrichi détermine par restriction à $\boxplus'$ un objet (co-)cubique enrichi au sens de la définition A.6.

Exemple A.13. L'objet cocubique enrichi $\mathbb{A}_k^\bullet$ est naturellement un objet cocubique Σ-enrichi. Un élément $\sigma \in \Sigma_n$ agit sur $\mathbb{A}_k^n$ par la permutation des facteurs, i.e., pour tout k-schéma S, σ envoie un n-uplet de S-points $(x_1, \dots, x_n)$ sur le n-uplet $(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$.

Soit Q un objet cubique Σ-enrichi d'une catégorie $\mathcal{C}$. Alors, le groupe Σ_n agit à droite sur $Q(\underline{\mathbf{1}}^n)$. Si de plus, $\mathcal{C}$ est additive karoubienne, cette action préserve la décomposition $\mathrm{C}_n^\sharp(Q) = \mathrm{C}_n(Q) \oplus \mathrm{D}_n(Q)$. On a le résultat suivant.

Lemme A.14. *Soit Q un objet cubique Σ-enrichi dans la catégorie des groupes abéliens. Soit $a \in \mathrm{C}_n(Q)$ un élément tel que $\mathrm{d}_{i,1}^*(a) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, les cycles a et* $\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma^*(a)$ *sont homologues, i.e., définissent la même classe d'homologie dans* $\mathrm{H}_n(\mathrm{C}_\bullet(Q)) \simeq \mathrm{H}_n(\mathrm{N}_\bullet(Q))$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas des transpositions $t_i = (i, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Il s'agit de montrer que $a + t_i^*(a)$ est homologue à zéro. On considère pour cela l'élément $b = (-1)^i t_{i+1}^* \mathrm{m}_i^*(a)$. Clairement, b est dans le noyau des $\mathrm{d}_{j,0}^*$ pour $1 \leq j \leq n+1$. Autrement dit, c'est un élément de $\mathrm{C}_{n+1}(Q)$. Par ailleurs, pour $j \notin \{i, i+1, i+2\}$, on a $\mathrm{d}_{j,1}^*(b) = 0$. Ainsi, la différentielle du complexe $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ envoie b sur

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}_{i,1}^* t_{i+1}^* \mathrm{m}_i^*(a) - \mathrm{d}_{i+1,1}^* t_{i+1}^* \mathrm{m}_i^*(a) + \mathrm{d}_{i+2,1}^* t_{i+1}^* \mathrm{m}_i^*(a) \\ &\quad = t_i^* \mathrm{d}_{i,1}^* \mathrm{m}_i^*(a) - \mathrm{d}_{i+2,1}^* \mathrm{m}_i^*(a) + \mathrm{m}_i^* \mathrm{d}_{i+1,1}^*(a) = t_i^*(a) + a. \qquad \square \end{aligned}$$

Dans la même veine, on a le résultat suivant.

Lemme A.15. *Soit Q un objet cubique Σ-enrichi d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Pour $n \geq 1$, on note $\mathrm{C}_n^{\mathrm{d}}(Q)$ le noyau du morphisme $\mathrm{d}_{n,1}^* : \mathrm{C}_n(Q) \to \mathrm{C}_{n-1}(Q)$. On convient aussi que $\mathrm{C}_n^{\mathrm{d}}(Q) = 0$ pour $n \leq 1$. Alors, $\mathrm{C}_\bullet^{\mathrm{d}}(Q)$ est un sous-complexe de $\mathrm{C}_\bullet(Q)$. De plus, l'inclusion $\mathrm{C}_\bullet^{\mathrm{d}}(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q)$ est naturellement homotope au morphisme donné en degré $n \geq 1$ par $(-1)^{n+1}(\phi_n)^* : \mathrm{C}_n^{\mathrm{d}}(Q) \to \mathrm{C}_n(Q)$ avec $\phi_n = (n \cdots 2\,1) \in \Sigma_n$ la permutation cyclique.*

Démonstration. Pour $n \geq 2$, notons $h_n : \underline{\mathbf{1}}^n \to \underline{\mathbf{1}}^{n-1}$ l'application donnée par $h_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_1\epsilon_n)$. Clairement, $h_2 = \mathrm{m}_1$ et h_n est une flèche de $\boxplus''$ pour tout n. On affirme que la famille des $h_n^* : \mathrm{C}_{n-1}^{\mathrm{d}}(Q) \to \mathrm{C}_n^{\mathrm{d}}(Q)$ (étendue par les morphismes nuls pour $n \leq 1$) définit une homotopie entre l'inclusion évidente et c^*. En effet, pour

$n = 1$, on a $(-\mathrm{d}^*_{1,1} + \mathrm{d}^*_{2,1}) \circ h^*_2 = 0$, et pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} h^*_n \circ \Big(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \mathrm{d}^*_{i,1}\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \mathrm{d}^*_{i,1}\Big) \circ h_{n+1} \\ = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i (\mathrm{d}_{i,1} \circ h_n)^* + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i (h_{n+1} \circ \mathrm{d}_{i,1})^*. \end{aligned}$$

Un inspection immédiate montre que $\mathrm{d}_{i,1} \circ h_n = h_{n+1} \circ \mathrm{d}_{i+1,1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Par ailleurs, $h_{n+1} \circ \mathrm{d}_{1,1}$ est l'identité de $\underline{\mathbf{1}}^n$ alors que

$$h_{n+1} \circ \mathrm{d}_{n+1,1}(x_1, \dots, x_n) = \phi_n(x_2, \dots, x_n, x_1). \qquad \square$$

On peut généraliser le lemme A.15 de la manière suivante.

Proposition A.16. *Soit Q un objet cubique Σ-enrichi d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et $r \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq r$, on pose $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) = \bigcap_{i=n-r+1}^n \ker\{\mathrm{d}^*_{i,1} : \mathrm{C}_n(Q) \to \mathrm{C}_{n-1}(Q)\}$. On convient aussi que $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) = 0$ pour $n \leq r$. Alors, $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q)$ est un sous-complexe de $\mathrm{C}_\bullet(Q)$. De plus, l'inclusion $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q)$ est naturellement homotope au morphisme donné en degré $n \geq r$ par $(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}+nr}(\phi_{n,r})^* : \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) \to \mathrm{C}_n(Q)$ avec $\phi_{n,r} \in \Sigma_n$ la permutation qui induit une bijection décroissante entre $[\![1, r]\!]$ et $[\![n-r+1, n]\!]$, et une bijection croissante entre $[\![r+1, n]\!]$ et $[\![1, n-r]\!]$.*

Démonstration. Lorsque $r = 0$, l'énoncé est vide. Lorsque $r = 1$, on retrouve l'énoncé du lemme A.15. Supposons donc que $r \geq 2$ et raisonnons par induction. On peut factoriser l'inclusion de $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q)$ de la manière suivante

$$\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \overset{(a)}{\hookrightarrow} \mathrm{C}^{\mathrm{d},r-1}_\bullet(Q) \overset{(b)}{\hookrightarrow} \mathrm{C}_\bullet(Q).$$

Considérons l'objet cubique Σ-enrichi P défini par

$$P(\underline{\mathbf{1}}^n) = \bigcap_{1 \leq i \leq r-1,\, \epsilon \in \{0,1\}} \ker\{\mathrm{d}^*_{n+i,\epsilon} : Q(\underline{\mathbf{1}}^{n+r}) \to Q(\underline{\mathbf{1}}^{n+r-1})\}.$$

Il est clair que $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r-1}_\bullet(Q) = \mathrm{C}_{\bullet-r+1}(P)$, que $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) = \mathrm{C}^{\mathrm{d}}_{\bullet-r+1}(P)$ et que l'inclusion (a) correspond à l'inclusion évidente $\mathrm{C}^{\mathrm{d}}_{\bullet-r+1}(P) \hookrightarrow \mathrm{C}_{\bullet-r+1}(P)$. En appliquant le lemme A.15 à l'objet cubique Σ-enrichi P, on obtient que (a) est homotope au morphisme donné en degré $n \geq r$ par $(-1)^{n-r+2}\phi^*_{n-r+1} : \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) \to \mathrm{C}^{\mathrm{d},r-1}_n(Q)$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à (b), il suffit de remarquer que $\phi_{n-r+1} \circ \phi_{n,r-1} = \phi_{n,r}$ et

$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}+nr-n}(-1)^{n-r+2} = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}+nr}. \qquad \square$$

Lemme A.17. *Gardons les hypothèses et notations de la proposition* A.16. *Soit $\sigma \in \Sigma_r$ une permutation. Notons $\mathrm{a}_{\mathrm{d}}(\sigma)$ l'automorphisme du complexe $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q)$ donné en degré $n \geq r$ par $(\mathrm{id}_{\underline{\mathbf{1}}^{n-r}} \times \sigma)^* : \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q)$. Alors, les compositions de*

$$\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \xrightarrow{\mathrm{a}_{\mathrm{d}}(\sigma)} \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q) \quad \textit{et} \quad \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \xrightarrow{\mathrm{sgn}(\sigma)} \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_\bullet(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q)$$

sont naturellement homotopes.

Démonstration. Clairement, $\mathrm{a_d}(-)$ définit une représentation du groupe symétrique Σ_r sur le complexe $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_{\bullet}(Q)$. Il suffit donc de prouver le lemme pour les permutations cycliques $(1\,2\cdots j)$ avec $2 \le j \le r$. Pour simplifier les notations, on considère seulement le cas $j = r$. Le cas général n'est guère plus difficile. Pour $n \ge r+1$, on note $f_n : \underline{\mathbf{1}}^n \to \underline{\mathbf{1}}^{n-1}$ l'application définie par $f_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-r-1}, \epsilon_{n-r}\cdot\epsilon_n, \epsilon_{n-r+1}, \dots, \epsilon_{n-1})$. Clairement, f_n est une flèche de $\boxplus''$ et induit un morphisme $f_n^* : \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) \to \mathrm{C}_n(Q)$. De plus,

$$\begin{aligned}
&(-1)^n f_n^* \circ \Big(\sum_{i=1}^{n-r}(-1)^i \mathrm{d}^*_{i,1}\Big) + (-1)^{n+1}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \mathrm{d}^*_{i,1}\Big) \circ f^*_{n+1} \\
&\quad = (-1)^n \sum_{i=1}^{n-r}(-1)^i(\mathrm{d}_{i,1}\circ f_n)^* + (-1)^n \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i(f_{n+1}\circ \mathrm{d}_{i,1})^* \\
&\quad = (-1)^n \sum_{i=1}^{n-r}(-1)^i(\mathrm{d}_{i,1}\circ f_n)^* + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n-r}(-1)^i(\mathrm{d}_{i,1}\circ f_n)^* \\
&\qquad\quad + (-1)^r(\mathrm{id}_{\underline{\mathbf{1}}^{n-r}} \times (1\cdots r))^* + (-1)^{n+1} \sum_{i=n-r+2}^{n} (-1)^i(\mathrm{d}_{i+1,1}\circ f_n)^* + \mathrm{id}^*_{\underline{\mathbf{1}}^n} \\
&\quad = \mathrm{id}^*_{\underline{\mathbf{1}}^n} - \mathrm{sgn}(1\,2\cdots r)\cdot(\mathrm{id}_{\underline{\mathbf{1}}^{n-r}} \times (1\,2\cdots r))^*.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Corollaire A.18. *Gardons les hypothèses et notations de la proposition* A.16. *L'inclusion* $\mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_{\bullet}(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_{\bullet}(Q)$ *est naturellement homotope au morphisme donné en degré* $n \ge r$ *par* $(-1)^{r(n+1)}(\tau_{r,n-r})^* : \mathrm{C}^{\mathrm{d},r}_n(Q) \to \mathrm{C}_n(Q)$ *avec* $\tau_{r,n-r} \in \Sigma_n$ *la permutation qui induit des bijections croissantes entre les ensembles* $[\![1,r]\!]$ *et* $[\![n-r+1,n]\!]$, *et les ensembles* $[\![r+1,n]\!]$ *et* $[\![1,n-r]\!]$ *respectivement.*

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la proposition A.16, du lemme A.17 et du fait que la signature de la permutation décroissante de $[\![1,r]\!]$ est égale à $(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}$. □

On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est une catégorie additive et $\mathbb{Q}$-linéaire. On note alt_n le projecteur alterné de l'algèbre $\mathbb{Q}[\Sigma_n]$ du groupe symétrique Σ_n, i.e.,

$$\mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\sigma.$$

Dans la catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire librement engendrée par $\boxplus''$, on a la relation

$$\mathrm{alt}_n \circ \Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mathrm{d}_{i,1}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mathrm{d}_{i,1}\Big)\circ \mathrm{alt}_{n-1}.$$

Il en découle le résultat suivant.

Lemme A.19. *Soit Q un objet cubique Σ-enrichi d'une catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire et karoubienne $\mathcal{C}$. Alors, les morphismes* alt_n^* *définissent un morphisme de complexes* $\mathrm{alt}^* : \mathrm{C}_{\bullet}(Q) \to \mathrm{C}_{\bullet}(Q)$ *qui est un projecteur de* $\mathrm{C}_{\bullet}(Q)$.

Définition A.20. Sous les hypothèses du lemme A.19, on notera $\mathrm{A}_\bullet(Q)$ l'image du projecteur alt^*. C'est le *complexe alterné* associé à Q.

Par construction $\mathrm{A}_\bullet(Q)$ est un facteur direct de $\mathrm{C}_\bullet(Q)$. On termine cette section avec le résultat suivant.

Proposition A.21. *Soit Q un objet cubique Σ-enrichi d'une catégorie abélienne et $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathcal{A}$. Alors, l'inclusion évidente $\mathrm{A}_\bullet(Q) \hookrightarrow \mathrm{C}_\bullet(Q)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On se ramène au cas d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel cubique Σ-enrichi en appliquant un foncteur exact et conservatif de la catégorie $\mathcal{A}$ dans celle des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Il suffit alors de montrer que le projecteur alt^* induit l'identité sur l'homologie du complexe $\mathrm{C}_\bullet(Q)$. Ceci découle immédiatement du lemme A.14. □

A.4. *r*-Complexes, objets *r*-cubiques et structures monoïdales. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $r \in \mathbb{N}$ un entier non nul. Rappelons qu'un *r-complexe* (ou *bicomplexe* lorsque $r = 2$) K dans $\mathcal{C}$ est formé d'une famille d'objets $(K_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^r}$ de $\mathcal{C}$ et d'une famille de morphismes $d^{(i)}_{\underline{n}} : K_{\underline{n}} \to K_{\underline{n}-e_i}$, avec $e_i = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq r}$ et δ_{ij} le symbole de Kronecker. On a alors les relations $d^{(i)}_{\underline{n}-e_i} \circ d^{(i)}_{\underline{n}} = 0$ et $d^{(j)}_{\underline{n}-e_i} \circ d^{(i)}_{\underline{n}} = d^{(i)}_{\underline{n}-e_j} \circ d^{(j)}_{\underline{n}}$. Lorsque $r = 2$, les différentielles $d^{(1)}_{n_1,n_2}$ et $d^{(2)}_{n_1,n_2}$ sont parfois appelées les différentielles horizontales et verticales et seront alors notées $d^{h}_{n_1,n_2}$ et $d^{v}_{n_1,n_2}$. Étant donnée une décomposition $r = r' + r''$ avec $r', r'' > 0$, on peut associer au r-complexe $(K_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^r}$ le r'-complexe $((K_{\underline{n}'\times\underline{n}''})_{\underline{n}''\in\mathbb{Z}^{r''}})_{\underline{n}'\in\mathbb{Z}^{r'}}$ dans la catégorie des r''-complexes dans $\mathcal{C}$ et le r''-complexe $((K_{\underline{n}'\times\underline{n}''})_{\underline{n}'\in\mathbb{Z}^{r'}})_{\underline{n}''\in\mathbb{Z}^{r''}}$ dans la catégorie des r'-complexes dans $\mathcal{C}$. Ces associations définissent clairement des isomorphismes de catégories.

Le complexe total $\mathrm{Tot}(K)$ associé au r-complexe $K = (K_{\underline{n}})_{n\in\mathbb{Z}^r}$ est défini de la manière suivante. En degré $d \in \mathbb{Z}$, il est donné par $\mathrm{Tot}(K)_d = \bigoplus_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^r,\,|n|=d} K_{\underline{n}}$. La differentielle de $d : \mathrm{Tot}(K)_d \to \mathrm{Tot}(K)_{d-1}$, restreinte au facteur $K_{\underline{n}}$ (avec $|\underline{n}| = d$), est donnée par $\sum_{i=1}^{r}(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} d^{(i)}_{\underline{n}}$. Il est immédiat de voir que la formation des complexes totaux est commutative et transitive au sens suivant. Étant donnée une décomposition $r = r' + r''$ avec $r', r'' > 0$, on a des identifications canoniques

(89)
$$\mathrm{Tot}\big(\big(\mathrm{Tot}((K_{\underline{n}'\times\underline{n}''})_{\underline{n}''\in\mathbb{Z}^{r''}})\big)_{\underline{n}'\in\mathbb{Z}^{r'}}\big) \simeq \mathrm{Tot}(K) \simeq \mathrm{Tot}\big(\big(\mathrm{Tot}((K_{\underline{n}'\times\underline{n}''})_{\underline{n}'\in\mathbb{Z}^{r'}})\big)_{\underline{n}''\in\mathbb{Z}^{r''}}\big).$$

Par ailleurs, soit $\sigma \in \Sigma_r$ une permutation. Au r-complexe $K = (K_{\underline{n}})_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^r}$ au peut associer un nouveau r-complexe ${}^{\sigma}K = (K_{\sigma(\underline{n})})_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^r}$, donné en degré $\underline{n} \in \mathbb{Z}^r$ par $K_{\sigma(\underline{n})}$, avec $\sigma(\underline{n}) = (n_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, n_{\sigma^{-1}(r)})$, et ayant les mêmes différentielles que K. Il est alors claire que les complexes $\mathrm{Tot}({}^{\sigma}K)$ et $\mathrm{Tot}(K)$ sont identiques en chaque degré. Toutefois, il n'ont pas en général les mêmes différentielles. Néanmoins, il existe un isomorphisme naturel $\mathrm{Tot}(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tot}({}^{\sigma}K)$ qui respecte la $\mathbb{Z}^r$-graduation et qui est l'identité fois un signe $(-1)^{\epsilon(\sigma,\underline{n})}$ sur le facteur $K_{\underline{n}}$ pour tout $\underline{n} \in \mathbb{Z}^r$. Ce morphisme est unique à un signe près, et on le normalise en imposant que $\epsilon(\sigma, \underline{0}) = 0$. On a alors $\epsilon(\sigma, \underline{n}) = \sum_{i<j,\,\sigma^{-1}(j)<\sigma^{-1}(i)} n_i n_j$ (modulo 2). Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [10, p. 174, exercise 11].

Définition A.22. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $(b,c) \in \mathbb{N}^2$. Un objet (b,c)-*cubique* (resp. *enrichi*, Σ-*enrichi*) de $\mathcal{C}$ est un foncteur covariant de $\boxplus^b \times (\boxplus^{\mathrm{op}})^c$ (resp. $\boxplus'^b \times (\boxplus'^{\mathrm{op}})^c$, $\boxplus''^b \times (\boxplus''^{\mathrm{op}})^c$) dans $\mathcal{C}$.

Lorsque $(b,c) = (0,2)$, on dira *bicubique* au lieu de $(0,2)$-cubique. De même, r-*cubique* et r-*cocubique* seront synonymes de $(0,r)$-cubique et $(r,0)$-cubique. Clairement, un objet (b,c)-cubique de $\mathcal{C}$ est un objet b-cocubique de la catégorie des objets c-cubiques de $\mathcal{C}$. Plus généralement, si $b = b'+b''$ et $c = c'+c''$, un objet (b,c)-cubique est un objet (b',c')-cubique de la catégorie des objets (b'',c'')-cubiques. Pour $\underline{n} \in \mathbb{N}^r$, on note $\underline{\mathbf{1}}^{\underline{n}}$ l'objet $(\underline{\mathbf{1}}^{n_1},\dots,\underline{\mathbf{1}}^{n_r})$. Pour $1 \le i \le r$, $s \ge -n_i$ et $a : \underline{\mathbf{1}}^{n_i} \to \underline{\mathbf{1}}^{n_i+s}$ une flèche dans $\boxplus''$, on note $a^{(i)} : \underline{\mathbf{1}}^{\underline{n}} \to \underline{\mathbf{1}}^{\underline{n}+s\cdot e_i}$ la flèche de $(\boxplus'')^r$ qui est a sur le i-ème facteur et l'identité sur les autres facteurs.

Soient $\mathcal{C}$ est une catégorie additive karoubienne, $r \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $Q : (\boxplus^{\mathrm{op}})^r \to \mathcal{C}$ un objet r-cubique de $\mathcal{C}$. On peut associer à Q un r-complexe $\mathrm{C}^\sharp_\bullet(Q)$ de la manière suivante. On pose $\mathrm{C}^\sharp_{\underline{n}}(Q) = 0$ si $n_i < 0$ pour au moins un $1 \le i \le r$. Sinon, on prend $\mathrm{C}^\sharp_{\underline{n}}(Q) = Q(\underline{\mathbf{1}}^{\underline{n}})$. La différentielle $\mathrm{C}^\sharp_{\underline{n}}(Q) \to \mathrm{C}^\sharp_{\underline{n}-e_i}(Q)$ est la somme alternée

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\big((\mathrm{d}^{(i)}_{j,1})^* - (\mathrm{d}^{(i)}_{j,0})^*\big).$$

On peut aussi définir un r-*complexe simple* $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ associé à Q par induction sur r. Lorsque $r = 1$, c'est le complexe de la définition A.4. Pour $r > 1$, on considère l'objet $(r-1)$-cubique $\mathrm{C}^{(r)}_\bullet(Q)$ de la catégorie des complexes dans $\mathcal{C}$ qui associe à $(\underline{\mathbf{1}}^{n_1},\dots,\underline{\mathbf{1}}^{n_{r-1}}) \in (\boxplus)^{r-1}$ le complexe simple associé à l'objet cubique $Q(\underline{\mathbf{1}}^{n_1},\dots,\underline{\mathbf{1}}^{n_{r-1}},-)$ de $\mathcal{C}$. On pose alors $\mathrm{C}_\bullet(Q) = \mathrm{C}_\bullet(\mathrm{C}^{(r)}_\bullet(Q))$. Le lemme A.3 entraîne par induction que $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ est un facteur direct du r-complexe $\mathrm{C}^\sharp_\bullet(Q)$. De plus, pour $\underline{n} \in \mathbb{N}^r$, $\mathrm{C}_{\underline{n}}(Q)$ est le noyau du morphisme

$$\textstyle\prod_{i,j}(\mathrm{d}^{(i)}_{j,0})^* : \mathrm{C}^\sharp_{\underline{n}}(Q) \quad\to \displaystyle\prod_{1\le i\le r,\,1\le j\le n_i} \mathrm{C}^\sharp_{\underline{n}-e_i}(Q).$$

Si Q est un objet r-cubique enrichi de $\mathcal{C}$, on peut définir un r-*complexe normalisé* $\mathrm{N}_\bullet(Q)$ associé à Q par induction. Lorsque $r = 1$, c'est le complexe de la définition A.10. Pour $r > 1$, on considère l'objet $(r-1)$-cubique $\mathrm{N}^{(r)}_\bullet(Q)$ de la catégorie des complexes dans $\mathcal{C}$ qui associe à $(\underline{\mathbf{1}}^{n_1},\dots,\underline{\mathbf{1}}^{n_{r-1}}) \in (\boxplus')^{r-1}$ le complexe nomalisé associé à l'objet cubique $Q(\underline{\mathbf{1}}^{n_1},\dots,\underline{\mathbf{1}}^{n_{r-1}},-)$ de $\mathcal{C}$. On pose alors $\mathrm{N}_\bullet(Q) = \mathrm{N}_\bullet(\mathrm{N}^{(r)}_\bullet(Q))$. La proposition A.8 entraîne par induction que $\mathrm{N}_\bullet(Q)$ est un facteur direct du r-complexe $\mathrm{C}_\bullet(Q)$. De plus, pour $\underline{n} \in \mathbb{N}^r$, $\mathrm{N}_{\underline{n}}(Q)$ est le conoyau du morphisme

$$\textstyle\cup_{i,j}(\mathrm{m}^{(i)}_j)^* : \displaystyle\bigoplus_{1\le i\le r,\,1\le j\le r_i-1} \mathrm{C}_{\underline{n}-e_i}(Q) \to \mathrm{C}_{\underline{n}}(Q).$$

Enfin, si Q est un objet r-cubique Σ-enrichi et si $\mathcal{C}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire, on peut définir un r-*complexe alterné* $\mathrm{A}_\bullet(Q)$ associé à Q. C'est l'image du projecteur $\mathrm{alt}^* : \mathrm{C}_\bullet(Q) \to \mathrm{C}_\bullet(Q)$ donné en degré $\underline{n} \in \mathbb{N}^r$ par l'action de

$$\mathrm{alt}_{\underline{n}} = \frac{1}{n_1!\cdots n_r!}\sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\in\Sigma_{n_1}\times\cdots\times\Sigma_{n_r}}\Big(\prod_{i=1}^{r}\mathrm{sgn}(\sigma_i)\Big)\cdot(\sigma_1\times\cdots\times\sigma_r).$$

Remarque A.23. Les catégories $\boxplus$, $\boxplus'$ et $\boxplus''$ admettent des structures monoïdales naturelles données par $\underline{\mathbf{1}}^m \otimes \underline{\mathbf{1}}^n = \underline{\mathbf{1}}^{m+n}$ et pour lesquelles les plongements évidents dans la catégorie des ensembles finis, munie du produit cartésien, sont monoïdaux. La catégorie $(\boxplus'', \otimes)$ est alors monoïdale symétrique et unitaire mais on fera attention que $(\boxplus, \otimes)$ et $(\boxplus', \otimes)$ sont seulement monoïdales et unitaires.

Soient Q un objet cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $r \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On définit un objet r-cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) $Q\langle r\rangle$ en posant

$$Q\langle r\rangle(\underline{\mathbf{1}}^{n_1}, \dots, \underline{\mathbf{1}}^{n_r}) = Q(\underline{\mathbf{1}}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \underline{\mathbf{1}}^{n_r}) = Q(\underline{\mathbf{1}}^{n_1+\cdots+n_r})$$

pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^r$. On a le résultat suivant.

Proposition A.24. (a) *Soit Q un objet cubique d'une catégorie additive et karoubienne $\mathcal{C}$. Il existe un morphisme canonique de complexes $p : \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q\langle r\rangle)) \to \mathrm{C}_\bullet(Q)$. Il est donné en degré $d \in \mathbb{N}$ par la flèche $\bigoplus_{n_1+\cdots+n_r=d} \mathrm{C}_d(Q) \to \mathrm{C}_d(Q)$ qui est l'identité sur chacun des facteurs.*

(b) *Soit Q un objet cubique enrichi d'une catégorie additive et karoubienne $\mathcal{C}$. Il existe alors un unique morphisme de complexes $\bar{p} : \mathrm{Tot}(\mathrm{N}_\bullet(Q\langle r\rangle)) \to \mathrm{N}_\bullet(Q)$ qui fait commuter le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q\langle r\rangle)) & \xrightarrow{p} & \mathrm{C}_\bullet(Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tot}(\mathrm{N}_\bullet(Q\langle r\rangle)) & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathrm{N}_\bullet(Q). \end{array}$$

(c) *Soit Q un objet cubique Σ-enrichi d'une catégorie additive, $\mathbb{Q}$-linéaire et karoubienne. Il existe alors un unique morphisme de complexes $\tilde{p} : \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q\langle r\rangle)) \to \mathrm{A}_\bullet(Q)$ qui fait commuter le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q\langle r\rangle)) & \xrightarrow{p} & \mathrm{C}_\bullet(Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q\langle r\rangle)) & \xrightarrow{\tilde{p}} & \mathrm{A}_\bullet(Q). \end{array}$$

(d) *Si la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne, les morphismes p, $\bar{p}$ et $\tilde{p}$ sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. On démontre seulement que p est un quasi-isomorphisme. L'inclusion dans $\mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q\langle r\rangle))_d$ du facteur $\mathrm{C}_d(Q)$ correspondant au r-uplet $(d, 0, \dots, 0)$, induit un morphisme de complexes $s : \mathrm{C}_\bullet(Q) \to \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q\langle r\rangle))$ qui est clairement une section à p. Il suffit donc de montrer que s est un quasi-isomorphisme. On peut considérer $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ comme un r-complexe si l'on convient que $\mathrm{C}_{(d,0,\dots,0)}(Q) = \mathrm{C}_d(Q)$ pour $d \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{C}_{(n_1,\dots,n_r)} = 0$ dès que $(n_2, \dots, n_r) \neq (0, \dots, 0)$. Alors, s provient d'un morphisme de r-complexes $\mathrm{C}_\bullet(Q) \to \mathrm{C}_\bullet(Q\langle r\rangle)$ induisant l'identité entre $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ et $\mathrm{C}_{(\bullet,0,\dots,0)}(Q\langle r\rangle)$. Pour terminer, et compte tenu de [47, Lemma 2.7.3], il suffit de prouver que les complexes $\mathrm{C}_{(\bullet,n_2,\dots,n_r)}(Q\langle r\rangle)$ sont acycliques pour $(n_2, \dots, n_r) \neq (0, \dots, 0)$. Ceci découle immédiatement du lemme A.25 ci-dessous. □

Lemme A.25. *Soit $Q : \boxplus' \to \mathcal{A}$ un objet cubique enrichi d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Pour $r \in \mathbb{N}$, on note $Q^{[r]}$ l'objet cubique donné par $Q^{[r]}(\underline{\mathbf{1}}^n) = Q(\underline{\mathbf{1}}^r \otimes \underline{\mathbf{1}}^n) = Q(\underline{\mathbf{1}}^{r+n})$. Alors, le complexe simple associé à l'objet cubique $\ker\{\mathrm{d}^*_{r+1,0} : Q^{[r+1]} \to Q^{[r]}\}$ est contractile.*

Démonstration. En effet, $\mathrm{m}^*_{r+1} : Q(\underline{\mathbf{1}}^{r+1+n}) \to Q(\underline{\mathbf{1}}^{r+1+n+1})$ préservent les sous-objets

$$\mathrm{C}_n\big(\ker\{Q^{[r+1]} \to Q^{[r]}\}\big) \subset Q(\underline{\mathbf{1}}^{r+1+n}),$$
$$\mathrm{C}_{n+1}\big(\ker\{Q^{[r+1]} \to Q^{[r]}\}\big) \subset Q(\underline{\mathbf{1}}^{r+1+n+1}).$$

On dispose donc d'une famille de morphismes induits

$$\mathrm{m}^*_{r+1} : \mathrm{C}_n\big(\ker\{Q^{[r+1]} \to Q^{[r]}\}\big) \to \mathrm{C}_{n+1}\big(\ker\{Q^{[r+1]} \to Q^{[r]}\}\big).$$

Un calcul immédiat montre que cette famille est une homotopie entre le morphisme nul et l'identité. □

Remarque A.26. Le lecteur pourra facilement adapter la preuve du lemme A.25 pour obtenir le résultat analogue pour les objets cubiques enrichis $Q(- \otimes \underline{\mathbf{1}}^r)$.

Supposons maintenant que $(\mathcal{C}, \otimes)$ est une catégorie monoïdale additive (i.e., le bifoncteur $- \otimes -$ est additif en chacune des variables). Étant donné un r-complexe K et un s-complexe L dans $\mathcal{C}$, on notera $K_\bullet \boxtimes L_\bullet$ le $(r+s)$-complexe donné en degré $(n_1, \dots, n_{r+s})$ par $K_{(n_1,\dots,n_r)} \otimes L_{(n_{r+1},\dots,n_{r+s})}$. On déduit des identifications (89) une identification canonique $\mathrm{Tot}(\mathrm{Tot}(K) \boxtimes \mathrm{Tot}(L)) \simeq \mathrm{Tot}(K \boxtimes L)$. On dispose aussi d'un isomorphisme canonique $\tau : \mathrm{Tot}(K \boxtimes L) \simeq \mathrm{Tot}(L \boxtimes K)$ qu'on obtient à partir des isomorphismes de permutation des facteurs. Étant donnés deux complexes $K_\bullet$ et $L_\bullet$, on notera $(K \otimes L)_\bullet$ le complexe total $\mathrm{Tot}(K_\bullet \boxtimes L_\bullet)$ associé au bicomplexe $K_\bullet \boxtimes L_\bullet$. Il est alors classique que $\mathbf{Cpl}(\mathcal{C})$, la catégorie des complexes dans $\mathcal{C}$, devient ainsi une catégorie monoïdale.

De même, étant donné un objet r-cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) Q et un objet s-cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) P de $\mathcal{C}$, on peut former l'objet $(r+s)$-cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) $Q \boxtimes P$ tel que $Q \boxtimes P(\underline{\mathbf{1}}^{(\underline{m},\underline{n})}) = Q(\underline{\mathbf{1}}^{\underline{m}}) \otimes P(\underline{\mathbf{1}}^{\underline{n}})$ pour tout $\underline{m} \in \mathbb{Z}^r$ et $\underline{n} \in \mathbb{Z}^s$. On a alors des identifications canoniques $\mathrm{C}_\bullet(Q \boxtimes P) \simeq \mathrm{C}_\bullet(Q) \boxtimes \mathrm{C}_\bullet(P)$, $\mathrm{N}_\bullet(Q \boxtimes P) \simeq \mathrm{N}_\bullet(Q) \boxtimes \mathrm{N}_\bullet(P)$ et $\mathrm{A}_\bullet(Q \boxtimes P) \simeq \mathrm{A}_\bullet(Q) \boxtimes \mathrm{A}_\bullet(P)$. On déduit aussi des identifications canoniques

$$\mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q)) \otimes \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(P)) \simeq \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q \boxtimes P)),$$
$$\mathrm{Tot}(\mathrm{N}_\bullet(Q)) \otimes \mathrm{Tot}(\mathrm{N}_\bullet(P)) \simeq \mathrm{Tot}(\mathrm{N}_\bullet(Q \boxtimes P)),$$
$$\mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q)) \otimes \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(P)) \simeq \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q \boxtimes P)).$$

Définition A.27. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale. Un objet *cubique pseudo-monoïdal* (resp. enrichi, Σ-enrichi) dans $\mathcal{C}$ est un foncteur pseudo-monoïdal de $\boxplus^{\mathrm{op}}$ (resp. $\boxplus'^{\mathrm{op}}$, $\boxplus''^{\mathrm{op}}$), munie de sa structure monoïdale de la remarque A.23, dans $\mathcal{C}$.

Pour la définition d'un foncteur pseudo-monoïdal, on renvoie le lecteur à [4, définition 2.1.85]. Un objet cubique pseudo-monoïdal (resp. enrichi, Σ-enrichi) Q est muni d'une famille de morphismes $m : Q(\underline{\mathbf{1}}^m) \otimes Q(\underline{\mathbf{1}}^n) \to Q(\underline{\mathbf{1}}^{m+n})$ qui commutent aux morphismes structuraux de l'objet cubique (resp. enrichi, Σ-enrichi) Q. Ces morphismes s'organisent donc en un morphisme d'objets bicubiques $m : Q \boxtimes Q \to Q\langle 2 \rangle$.

Lemme A.28. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale additive et karoubienne. Soit Q un objet cubique pseudo-monoïdal de $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{C}_\bullet(Q)$ est naturellement une algèbre de $\mathbf{Cpl}(\mathcal{C})$ et sa multiplication est donnée par la composition de*

$$\mathrm{C}_\bullet(Q) \otimes \mathrm{C}_\bullet(Q) = \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q) \boxtimes \mathrm{C}_\bullet(Q)) = \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q \boxtimes Q)) \xrightarrow{m} \mathrm{Tot}(\mathrm{C}_\bullet(Q\langle 2\rangle)) \xrightarrow{p} \mathrm{C}_\bullet(Q).$$

Si Q un objet cubique pseudo-monoïdal enrichi de $\mathcal{C}$, l'énoncé analogue pour $\mathrm{N}_\bullet(Q)$ est encore vrai.

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

Définition A.29. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale. Un objet *cubique pseudo-monoïdal symétrique Σ-enrichi* est un foncteur pseudo-monoïdal symétrique de $\boxplus''^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{C}$.

Autrement dit, un objet cubique pseudo-monoïdal symétrique Σ-enrichi est un objet cubique pseudo-monoïdal Σ-enrichi tel que les carrés

$$\begin{tikzcd} Q(\underline{\mathbf{1}}^m) \otimes Q(\underline{\mathbf{1}}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & Q(\underline{\mathbf{1}}^{m+n}) \arrow[d, "\tau^*_{n,m}"] \\ Q(\underline{\mathbf{1}}^n) \otimes Q(\underline{\mathbf{1}}^m) \arrow[r] & Q(\underline{\mathbf{1}}^{n+m}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Comme d'habitude, $\tau_{n,m} \in \Sigma_{m+n}$ est la permutation qui induit des bijections croissantes de $[\![1, n]\!]$ et $[\![n+1, n+m]\!]$ dans $[\![m+1, m+n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$. On termine avec le lemme suivant.

Lemme A.30. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique, additive, $\mathbb{Q}$-linéaire et karoubienne. (On suppose que toute ces structures sont compatibles de la manière évidente.) Soit Q un objet cubique pseudo-monoïdal Σ-enrichi de $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{A}_\bullet(Q)$ est naturellement une algèbre de $\mathbf{Cpl}(\mathcal{C})$ et sa multiplication est donnée par la composition de*

$$\mathrm{A}_\bullet(Q) \otimes \mathrm{A}_\bullet(Q) = \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q) \boxtimes \mathrm{A}_\bullet(Q)) = \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q \boxtimes Q)) \xrightarrow{m} \mathrm{Tot}(\mathrm{A}_\bullet(Q\langle 2\rangle)) \xrightarrow{\tilde{p}} \mathrm{A}_\bullet(Q).$$

Si de plus Q est un objet cubique pseudo-monoïdal symétrique Σ-enrichi, alors $\mathrm{A}_\bullet(Q)$ est une algèbre commutative.

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

B. Équivalence entre les motifs avec et sans transferts

Soient k un corps de caractéristique nulle, et Λ un anneau commutatif et noethérien. Dans cette deuxième annexe, nous présentons une preuve du résultat suivant du à Cisinski et Déglise.

Théorème B.1. *Soit B un k-schéma normal et supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors, le foncteur*

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\mathrm{\acute{e}t}}(B, \Lambda) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},\mathrm{\acute{e}t}}(B, \Lambda)$$

est une équivalence de catégories.

Pour B le spectre d'un corps parfait, un résultat plus précis mais dans le contexte stable a été annoncé par Morel dans une note non publiée (cf. [34]). Cisinski et Déglise en donnent une preuve, toujours pour la variante stable, dans [13, §15.2] pour B une base très générale. Leur méthode utilise la K-théorie algébrique comme prévu par Morel.

La preuve présentée ici du théorème B.1 est simple et élémentaire, et n'utilise pas la K-théorie algébrique. Elle consiste en une simplification de la méthode de Cisinski et Déglise [13] qui fonctionne tout aussi bien pour les catégories effectives. Nous ne prétendons donc pas à l'originalité.

Dans la suite, B sera comme dans l'énoncé du théorème B.1. Notons Nor/B la catégorie des B-schémas de type fini normaux (sur k) que l'on munit de la topologie étale. La catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda))$ possède une structure de modèles projective ét-locale pour laquelle les équivalences faibles sont les morphismes de complexes induisant un isomorphisme sur les faisceaux associés aux préfaisceaux d'homologie. Comme d'habitude, on localise cette structure pour obtenir la structure projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale pour laquelle les flèches $\mathbb{A}^1_X \otimes \Lambda[n] \to X \otimes \Lambda[n]$ sont des équivalences faibles pour tout $X \in \mathsf{Nor}/B$ et $n \in \mathbb{Z}$. La catégorie homotopique de la structure projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale sera notée $\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)$.

L'inclusion $\mathrm{i}_B : \mathsf{Sm}/B \hookrightarrow \mathsf{Nor}/B$ induit un foncteur de Quillen à gauche

$$\mathrm{i}_B^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda))$$

pour les structures projectives $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. (On se sert pour cela de [5, theorème 4.4.60] et on reprend l'argument de la preuve de [5, theorème 4.5.14].) On a le résultat suivant.

Lemme B.2. *Le foncteur* $\mathsf{Li}_B^* : \mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(B, \Lambda) \to \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)$ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que le foncteur i_{B*} préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. Le fait qu'il préserve les équivalences ét-locales découle aussitôt du fait que le foncteur i_{B*} commute à la faisceautisation pour la topologie étale. En utilisant une propriété générale de la localisation de Bousfield, à savoir [5, proposition 4.2.74], et le fait que le foncteur i_{B*} commute aux colimites, on se ramène à montrer que $\mathrm{i}_{B*}(\mathbb{A}^1_V \otimes \Lambda) \to \mathrm{i}_{B*}(V \otimes \Lambda)$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale pour tout $V \in \mathsf{Nor}/B$. Or, cette flèche s'identifie à $\mathbb{A}^1_B \otimes (\mathrm{i}_{B*}(V \otimes \Lambda)) \to \mathrm{i}_{B*}(V \otimes \Lambda)$. On applique [5, lemme 4.5.13 (2)] avec $H = \mathrm{i}_{B*}(V \otimes \Lambda)$ pour conclure.

Il est maintenant aisé de démontrer le lemme. En effet, on doit montrer que le morphisme d'unité $K \to \mathsf{Ri}_{B*}\mathsf{Li}_B^* K$ est inversible pour tout $K \in \mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(B, \Lambda)$. On ne restreint pas la généralité en supposant que K est projectivement cofibrant de sorte que $\mathsf{Li}_B^* K \simeq \mathrm{i}_B^* K$. Par ailleurs, on a vu que i_{B*} se dérive trivialement puisqu'il préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. On est donc ramené à montrer que le morphisme d'unité $K \to \mathrm{i}_{B*}\mathrm{i}_B^* K$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale. C'est en fait un isomorphisme. En effet, pour tout préfaisceau F sur Sm/B, l'ensemble des sections de $\mathrm{i}_B^* F$ au-dessus de $V \in \mathsf{Sm}/B$ est donné par la colimite suivant les $(V \to U) \in V\backslash(\mathsf{Sm}/B)$ des $F(U)$. Or, la catégorie $V\backslash(\mathsf{Sm}/B)$ admet un objet initial, à savoir id_V. Le lemme est démontré. □

Soit $g : B' \to B$ un morphisme de k-schémas normaux. On dispose d'un foncteur $g \circ - : \mathsf{Nor}/B' \to \mathsf{Nor}/B$ qui induit une adjonction de Quillen $(g_\sharp, g^*)$ relativement aux structures projectives $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B', \Lambda)) \underset{g^*}{\overset{g_\sharp}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)). \tag{90}$$

L'argument de la première moitiée de la preuve du lemme B.2 s'applique littéralement à g^* pour montrer que ce dernier préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. Il se dérive donc trivialement : $\mathsf{R}g^* \simeq g^*$. On a le résultat suivant.

Lemme B.3. *Il existe un carré commutatif à un isomorphisme canonique près*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda) & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/B', \Lambda) \\ \big\downarrow \mathrm{i}_B^* & & \big\downarrow \mathrm{i}_{B'}^* \\ \mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda) & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B', \Lambda). \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible de manière évidente à la composition des morphismes de k-schémas normaux.

Démonstration. Soit F un préfaisceau de Λ-modules sur Sm/B et soit $X' \in \mathsf{Nor}/B'$. Par définition, on a des isomorphismes canoniques

$$\Gamma(X', \mathrm{i}_{B'}^* g^* F) \simeq \operatorname*{colim}_{(X'/B' \to B' \times_B U/B',\, U/B) \in (X'/B') \backslash (\mathsf{Sm}/B)} F(U)$$

et

$$\Gamma(X', g^* \mathrm{i}_B^* F) \simeq \operatorname*{colim}_{(X'/B \to U/B,\, U/B) \in (X'/B) \backslash (\mathsf{Sm}/B)} F(U).$$

Or, l'association $(X'/B \to U/B, U/B) \rightsquigarrow (X'/B' \to B' \times_B U/B', U/B)$ définit une équivalence de catégories entre $(X'/B)\backslash(\mathsf{Sm}/B)$ et $(X'/B')\backslash(\mathsf{Sm}/B)$. Le lemme est prouvé. □

Corollaire B.4. *Il existe un carré commutatif à un isomorphisme canonique près*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(B, \Lambda) & \xrightarrow{\mathsf{L}g^*} & \mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(B', \Lambda) \\ \big\downarrow \mathsf{Li}_B^* & & \big\downarrow \mathsf{Li}_{B'}^* \\ \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda) & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B', \Lambda). \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible de manière évidente avec la composition des morphismes de k-schémas normaux.

Démonstration. Ceci découle immédiatement du lemme B.3 et du fait que le foncteur de Quillen à droite g^* de (90) se dérive trivialement. □

Proposition B.5. *Soit X un B-schéma de type fini normal, et notons $f : X \to B$ le morphisme structural. Pour tout $M \in \mathbf{DA}^{\text{eff, et}}(B, \Lambda)$, on a un isomorphisme canonique*

$$\hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)}(X \otimes \Lambda, \mathsf{Li}_B^* M) \simeq \hom_{\mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(X,\Lambda)}(\Lambda, \mathsf{L}f^* M).$$

Démonstration. Par l'adjonction $(f_\sharp, f^*)$, on a

$$\hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)}(X \otimes \Lambda, \mathsf{Li}_B^* M) \simeq \hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/X,\Lambda)}(\Lambda, f^* \mathsf{Li}_B^* M).$$

D'autre part, le corollaire B.4 et le lemme B.2 fournissent des isomorphismes

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/X,\Lambda)}(\Lambda, f^*\mathsf{Li}_B^* M) &\simeq \hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/X,\Lambda)}(\Lambda, \mathsf{Li}_X^*\mathsf{L}f^*M)\\ &\simeq \hom_{\mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(X,\Lambda)}(\Lambda, \mathsf{L}f^*M).\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. □

Rappelons que la topologie fh (cf. [6, §2.2.1]) est la topologie de Grothendieck la moins fine sur Nor/B pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes :

- la famille des inclusions des composantes connexes de $X \in \mathsf{Nor}/B$,
- le singleton formé d'un morphisme fini surjectif entre B-schémas normaux et intègres.

Un préfaisceau F sur Nor/B est un fh-faisceau si et seulement s'il est additif (i.e., transforme un coproduit fini de B-schémas en un produit de Λ-modules) et si pour tout revêtement pseudo-galoisien de B-schémas normaux intègres $X' \to X$, le morphisme $F(X) \to F(X')^{\mathrm{aut}(X'/X)}$ est inversible. De même, un complexe K de préfaisceaux sur Nor/B est fh-local si et seulement s'il est additif (à quasi-isomorphisme près) et si les morphismes

$$K(X) \to \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{aut}(X'/X), F(X'))$$

sont des isomorphismes dans $\mathbf{D}(\Lambda)$. Lorsque Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, la condition précédente est équivalente à ce que le morphisme $K(X) \to K(X')^{\mathrm{aut}(X'/X)}$ soit un quasi-isomorphisme puisque le foncteur $\Gamma(\mathrm{aut}(X'/X), -)$ est exact. Enfin, un objet $N \in \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)$ sera dit fh-local, s'il en est ainsi d'un remplacement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant de N. Il est clair que la sous-catégorie pleine des objets fh-locaux est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)$. Lorsque Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, N est fh-local si et seulement si les homomorphismes

$$\hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)}(X\otimes\Lambda, N) \to \hom_{\mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)}(X'\otimes\Lambda, N)^{\mathrm{aut}(X'/X)} \tag{91}$$

sont inversibles. Ceci permet de vérifier le résultat suivant.

Proposition B.6. *On suppose que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. L'image de*

$$\mathsf{Li}_B^* : \mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(B,\Lambda) \to \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)$$

est contenue dans la sous-catégorie triangulée des objets fh-*locaux.*

Démonstration. Soit $r : X' \to X$ un revêtement pseudo-galoisien de B-schémas normaux et intègres, et soit $M \in \mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(B,\Lambda)$. On cherche à montrer que (91) est inversible pour $N = \mathsf{Li}_B^*(M)$. Notons $f : X \to B$ la projection structurale et $G = \mathrm{aut}(X'/X)$. En utilisant la proposition B.5, on se ramène à montrer que

$$\hom_{\mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(X,\Lambda)}(\Lambda, \mathsf{L}f^*M) \to \hom_{\mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(X',\Lambda)}(\Lambda, \mathsf{L}r^*\mathsf{L}f^*M)^G$$

est un isomorphisme. Par adjonction, on voit qu'il suffit de prouver que la transformation naturelle $\mathrm{id} \to \Phi$ est inversible avec $\Phi \subset \mathsf{R}r_*\mathsf{L}r^*$ l'image du projecteur $p_G = \mathrm{card}(G)^{-1}\sum_{g\in G} g$ qui agit naturellement sur $\mathsf{R}r_*\mathsf{L}r^*$.

On peut trouver une stratification $(X_i)_{0\le i\le n}$ par des sous-schémas localement fermés et intègres X_i telle que X_i et $X_i' = (X' \times_X X_i)_{\mathrm{red}}$ sont des schémas normaux et le morphisme canonique $r_i : X'_i \to X_i$ est étale. Notons $u_i : X_i \hookrightarrow X$ l'inclusion évidente. Par l'axiome de localité (cf. [5, corollaire 4.5.44]), il suffit de montrer que $\mathsf{L}u_i^* \to \mathsf{L}u_i^*\Phi$ est inversible pour tout $0 \leq i \leq n$. Or, si $\Phi_i \subset \mathsf{R}r_{i*}\mathsf{L}r_i^*$ désigne l'image du projecteur p_G, le lemme B.7 ci-dessous entraîne que $\mathsf{L}u_i^* \circ \Phi \simeq \Phi_i \circ \mathsf{L}u_i^*$. Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{id} \to \Phi_i$ est inversible. Soit $v_i : V_i \to X_i$ un morphisme étale surjectif et notons u'_i le changement de base de u_i suivant v_i. Puisque le foncteur $\mathsf{L}v_i^* : \mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(X_i, \Lambda) \to \mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(V_i, \Lambda)$ est conservatif, il suffit de montrer que $\mathsf{L}v_i^* \to \mathsf{L}v_i^* \circ \Phi_i \simeq \Phi'_i \circ \mathsf{L}v_i^*$ est inversible avec $\Phi'_i \subset \mathsf{R}u'_{i*}\mathsf{L}u_i'^*$ l'image du projecteur p_G. Pour v_i bien choisi (par exemple si $v_i = u_i$), le morphisme u'_i est la projection sur V_i d'une union disjointe de copies de V_i permutées transitivement par G. Dans ce cas, il est clair que Φ'_i est le foncteur identité. □

Lemme B.7. *Supposons donné un carré cartésien de B-schémas de type fini*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ {\scriptstyle e'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

avec e un morphisme fini. Alors le morphisme de changement de base $f^*e_* \to e'_*f'^*$, entre foncteurs de $\mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(X', \Lambda)$ dans $\mathbf{DA}^{\text{eff,ét}}(Y, \Lambda)$, est inversible.

Démonstration. Rappelons que la variante stable de ce lemme est bien connue : c'est un cas particulier du théorème de changement de base pour un morphisme projectif (voir [4, corollaire 1.7.18]).

Lorsque f est lisse, le morphisme qui nous intéresse est déduit par adjonction du morphisme de changement de base $f'_\sharp e'^* \to e^* f_\sharp$. Ce dernier est inversible (voir [5, proposition 4.5.48] dont la preuve fonctionne tout aussi bien dans le contexte effectif que dans le contexte stable). Ainsi, en factorisant le morphisme f par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse, on se ramène à considérer le cas où $f = i$ est une immersion fermée. Notons $j : U \hookrightarrow X$ et $j' : U' \hookrightarrow X'$ les immersions ouvertes complémentaires à i et i' respectivement. En utilisant l'axiome de localité (cf. [5, théorème 4.5.36]), on se ramène facilement à montrer que la transformation naturelle $j_\sharp e'_* \to e_* j'_\sharp$ est inversible. On divise la preuve de cela en trois parties.

Partie A. Nous montrerons ici que le foncteur

$$e_* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/X', \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda))$$

préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales (ceci s'appliquera aussi à tout morphisme fini). Remarquons d'abord qu'il préserve les quasi-isomorphismes (entre complexes de faisceaux étales). Ceci est une conséquence du fait qu'un schéma fini au-dessus d'un schéma strictement hensélien est une union disjointe de schémas strictement henséliens. Pour la même raison, le foncteur e_* commute aux colimites quelconques. En utilisant [5, proposition 4.2.74], on se ramène alors à montrer que $e_*\mathrm{a}_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_{U'} \otimes \Lambda) \to e_*\mathrm{a}_{\text{ét}}(U' \otimes \Lambda)$ est une équivalence $\mathbb{A}^1$-locale pour $U' \in \mathsf{Sm}/X'$. On peut vérifier cela par la méthode habituelle consistant à définir une $\mathbb{A}^1$-homotopie entre l'identité de $e_*\mathrm{a}_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_U \otimes \Lambda)$ et l'endomorphisme induit par l'application nulle de $\mathbb{A}^1$ dans lui-même.

Partie B. Ici, nous montrerons que le foncteur

$$j_\sharp : \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/U, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\mathsf{Sm}/X, \Lambda))$$

préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. (Ceci s'appliquera aussi à toute immersion ouverte.) Rappelons que si $f : Y \to X$ est un morphisme lisse avec Y connexe et si F est un faisceau de Λ-modules sur Sm/U, alors

$$j_\sharp(F)(Y) = \begin{cases} F(Y) & \text{si } f(Y) \subset U, \\ 0 & \text{si } f(Y) \not\subset U. \end{cases}$$

Il s'ensuit aussitôt que $j_\sharp$ préserve les quasi-isomorphismes de complexes de faisceaux étales. Or, il est de Quillen à gauche pour la structure projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale. Ceci permet de conclure.

Partie C. D'après ce qui précède, il reste à montrer que la transformation naturelle $j_\sharp e'_* \to e_* j'_\sharp$ est inversible pour les faisceaux étales de Λ-modules. Il s'agit d'une vérification facile qu'on laisse au lecteur. □

On note fhét la topologie sur Nor/B engendrée par la topologie étale et la topologie fh. Un préfaisceau sur Nor/B est un fhét-faisceau si et seulement si c'est un faisceau étale et un fh-faisceau. On a le résultat simple suivant.

Lemme B.8. *Soit F un* fh*-faisceau de Λ-modules sur* Nor/B. *Alors, le faisceau étale* $\mathrm{a}_{\text{ét}}(F)$ *associé à F est un* fhét*-faisceau.*

Démonstration. Soit $X' \to X$ un revêtement pseudo-galoisien entre B-schémas normaux et intègres et posons $G = \operatorname{aut}(X'/X)$. Il faut montrer que $\mathrm{a}_{\text{ét}}(F)(X) \to \mathrm{a}_{\text{ét}}(F)(X')^G$ est inversible. Soit $(U_i \to X)_{i \in I}$ un recouvrement étale de X. On en déduit un recouvrement étale $(U'_i = X' \times_X U_i \to X')_{i \in I}$. La condition de recollement montre qu'il suffit de prouver que $\mathrm{a}_{\text{ét}}(F)(U_i) \to \mathrm{a}_{\text{ét}}(F)(U'_i)^G$ est inversible. Par un passage à la limite, on se ramène à prouver que $\mathrm{a}_{\text{ét}}(F)(X^{\text{hs}}_{\bar{x}}) \to \mathrm{a}_{\text{ét}}(F)(X' \times_X X^{\text{hs}}_{\bar{x}})^G$ est inversible avec $X^{\text{hs}}_{\bar{x}}$ l'hensélisé strict de X en un point géométrique $\bar{x}$. Comme $X' \times_X X^{\text{hs}}_{\bar{x}}$ est une somme disjointe de schémas strictement henséliens, notre morphisme s'identifie à $F(X^{\text{hs}}_{\bar{x}}) \to F(X' \times_X X^{\text{hs}}_{\bar{x}})^G$. Il est donc inversible puisque F est un fh-faisceau. □

Considérons maintenant la catégorie $\mathbf{Shv}_{\text{fh}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)$ des fh-faisceaux de Λ-modules sur Nor/B. On dispose d'une structure de modèle fhét-locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\text{fh}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda))$ pour laquelle les équivalences faibles sont les morphismes de complexes de fh-faisceaux induisant des isomorphismes sur les fhét-faisceaux associés aux préfaisceaux d'homologie. Vu le lemme B.8, il est loisible de qualifier cette structure de ét-locale, ce que nous ferons dans la suite. On localise cette structure pour obtenir la structure projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale pour laquelle les flèches $\mathrm{a}_{\text{fh}}(\mathbb{A}^1_X \otimes \Lambda)[n] \to \mathrm{a}_{\text{fh}}(X \otimes \Lambda)[n]$ sont des équivalences faibles pour tout $X \in \mathsf{Nor}/B$ et $n \in \mathbb{Z}$. La catégorie homotopique de la structure projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale sera notée $\mathbf{D}^{\text{fh}}_{\mathbb{A}^1, \text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)$.

Proposition B.9. *Le foncteur* $\mathrm{a}_{\text{fh}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\text{fh}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda))$ *est de Quillen à gauche. De plus, il préserve les équivalences* $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$*-locales. Si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, il en est de même de l'adjoint à droite* o_{fh}.

Démonstration. Le foncteur a_{fh} est exact. Ainsi, pour montrer qu'il préserve les équivalences ét-locales, il suffit de montrer que si un morphisme de préfaisceaux de Λ-modules

$F \to G$ induit un isomorphisme sur les faisceaux étales associés, il en est de même de $\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(F) \to \mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(G)$. Ceci découle d'une propriété plus précise, à savoir que le morphisme évident $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{a}_{\mathrm{fh}} \to \mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}\mathrm{a}_{\text{ét}}$ est inversible. Pour établir cette propriété, il suffit de remarquer que le lemme B.8 entraîne que les deux foncteurs composés $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}$ et $\mathrm{a}_{\text{ét}}\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}\mathrm{a}_{\text{ét}}$ fournissent une construction du fhét-faisceau associé. On a donc montré que a_{fh} est un foncteur de Quillen à gauche relativement aux structures ét-locales. Le passage à la $\mathbb{A}^1$-localisation est immédiat.

Supposons à présent que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Les foncteurs

$$\Gamma(G,-) : \mathrm{Mod}(\Lambda[G]) \to \mathrm{Mod}(\Lambda)$$

commutent alors aux colimites pour tout groupe fini G. On déduit aussitôt que l'inclusion $\mathbf{Shv}_{\mathrm{fh}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)$ commute aux colimites. En particulier, l'homologie d'un complexe de fh-faisceaux de Λ-modules K coïncide avec l'homologie du complexe de préfaisceaux $\mathrm{o}_{\mathrm{fh}}(K)$. Il vient que le foncteur o_{fh} préserve les équivalences ét-locales. Pour montrer qu'il préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales, il suffit par [5, proposition 4.2.74] de vérifier que $\mathrm{o}_{\mathrm{fh}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(\mathbb{A}^1_X \otimes \Lambda) \to \mathrm{o}_{\mathrm{fh}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(X \otimes \Lambda)$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale pour tout $X \in \mathsf{Nor}/B$. On peut démontrer cela à l'aide d'une homotopie explicite entre l'identité de $\mathrm{o}_{\mathrm{fh}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(\mathbb{A}^1_X \otimes \Lambda)$ et l'endomorphisme induit par l'endomorphisme nul de $\mathbb{A}^1$. □

La proposition B.9 fournit un foncteur triangulé

$$\mathrm{a}_{\mathrm{fh}} = \mathsf{La}_{\mathrm{fh}} : \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda) \to \mathbf{D}^{\mathrm{fh}}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda).$$

On a le résultat suivant.

Proposition B.10. *Si Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, alors le foncteur*

$$\mathrm{a}_{\mathrm{fh}} \circ \mathsf{Li}^*_B : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\text{ét}}(B,\Lambda) \to \mathbf{D}^{\mathrm{fh}}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. Vu le lemme B.2, il suffit de montrer que la transformation naturelle $\mathsf{Li}^*_B \to \mathrm{o}_{\mathrm{fh}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}\mathsf{Li}^*_B$ est inversible. Soit $M \in \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\text{ét}}(B,\Lambda)$ et soit N un remplacement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant de $\mathsf{Li}^*_B(M)$. Par la proposition B.6, le complexe N est fh-local. Ceci entraîne aussitôt que $N \to \mathrm{o}_{\mathrm{fh}}\,\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}N$ est un quasi-isomorphisme. La proposition est démontrée. □

Rappelons que $\mathbf{Cor}(B)$ désigne la catégorie ayant pour objets les B-schémas lisses et pour morphismes les correspondances finies. Les foncteurs contravariants additifs de $\mathbf{Cor}(B)$ à valeurs dans $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ sont appelés les préfaisceaux avec transferts. Ils forment une catégorie abélienne notée $\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B,\Lambda)$. Rappelons aussi qu'on peut identifier $\mathbf{Cor}(B)$ à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Shv}_{\mathrm{fh}}(\mathsf{Nor}/B,\mathbb{Z})$ dont les objets sont les fh-faisceaux de la forme $\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(X \otimes \mathbb{Z})$ avec X un B-schéma lisse. Ce point de vue permet de définir un foncteur

$$\mathrm{i}^*_{B,\mathrm{tr}} : \mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B,\Lambda) \to \mathbf{Shv}_{\mathrm{fh}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda)$$

adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{i}_{B,\mathrm{tr}*}$ qui à un fh-faisceau F associe le préfaisceau avec transferts : $X \in \mathsf{Sm}/B \rightsquigarrow \hom(\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}(X \otimes \mathbb{Z}), F)$. On a le fait suivant.

Lemme B.11. *Le foncteur* $\mathrm{i}^*_{B,\mathrm{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B,\Lambda)) \to \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{fh}}(\mathsf{Nor}/B,\Lambda))$ *est de Quillen à gauche relativement aux structures* $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$*-locales.*

Démonstration. Voici une façon économique de démontrer cela. Il est clair que $(\mathrm{i}^*_{B,\mathrm{tr}}, \mathrm{i}_{B,\mathrm{tr}*})$ est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives non localisées (i.e., où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes). En effet, $\mathrm{i}_{B,\mathrm{tr}*}$ préserve les épimorphismes et les quasi-isomorphismes. Pour démontrer le lemme, il suffira donc de vérifier que le foncteur $\mathrm{i}_{B,\mathrm{tr}*}$ préserve les objets $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locaux. Soit $K \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{fh}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda))$ un tel objet. On sait que $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}\, \mathrm{i}_{B,\mathrm{tr}*}(K) \simeq \mathrm{i}_{B*}\, \mathrm{o}_{\mathrm{fh}}(K)$ est $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-local puisque $\mathrm{i}_{B*}\, \mathrm{o}_{\mathrm{fh}}$ est un foncteur de Quillen à droite. Ceci nous ramène à montrer que o_{tr} détecte les objets $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locaux. Supposons que $L \in \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda))$ est tel que $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(L)$ est $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-local. Soit $e : L \to L'$ une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale avec L' un objet $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-local. Par le lemme 2.111 (en fait, sa généralisation à une base de dimension non nulle), $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(e)$ est une équivalence $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale entre deux objets $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locaux. C'est donc un quasi-isomorphisme et il revient au même de dire que e est un quasi-isomorphisme. En particulier L est aussi $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-local. Le lemme est démontré. □

Lemme B.12. *Le foncteur* $\mathsf{Li}^*_{B,\mathrm{tr}} : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff,ét}}(B, \Lambda) \to \mathbf{D}^{\mathrm{fh}}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda)$ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. Il s'agit d'adapter la preuve du lemme B.2. On laisse cet exercice au lecteur. □

Expliquons maintenant comment terminer la preuve du théorème B.1. Il est facile de voir qu'on a un carré commutatif à un isomorphisme canonique près

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}} & \mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{i}^*_B} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{i}^*_{B,\mathrm{tr}}} \\ \mathbf{PSh}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}} & \mathbf{Shv}_{\mathrm{fh}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda). \end{array}$$

(En fait, la commutativité se vérifie plus facilement sur les adjoints à droite.) En passant aux catégories de complexes et en inversant ensuite les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales, on obtient un carré commutatif à un isomorphisme canonique près

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DA}^{\mathrm{eff,ét}}(B, \Lambda) & \xrightarrow{\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}} & \mathbf{DM}^{\mathrm{eff,ét}}(B, \Lambda) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Li}^*_B} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{Li}^*_{B,\mathrm{tr}}} \\ \mathbf{D}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{a}_{\mathrm{fh}}} & \mathbf{D}^{\mathrm{fh}}_{\mathbb{A}^1,\text{ét}}(\mathsf{Nor}/B, \Lambda). \end{array}$$

La proposition B.10 et le lemme B.12 entraînent alors que le foncteur

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{DA}^{\mathrm{eff,ét}}(B, \Lambda) \to \mathbf{DM}^{\mathrm{eff,ét}}(B, \Lambda)$$

est pleinement fidèle. Or, il commute aux sommes infinies et son image contient des générateurs compacts de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff,ét}}(B, \Lambda)$. C'est donc une équivalence de catégories !

On a aussi la version stable du théorème B.1.

Théorème B.13. *Soit B un k-schéma normal et supposons que Λ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Alors, le foncteur*

$$\mathsf{La}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(B, \Lambda) \to \mathbf{DM}^{\text{ét}}(B, \Lambda)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. On peut reformuler le théorème B.1 en disant que

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda)) \underset{\mathrm{o_{tr}}}{\overset{\mathrm{a_{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda))$$

est une équivalence de Quillen relativement aux structures $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. Cette propriété passe à la catégorie des spectres symétriques pour fournir une équivalence de Quillen

$$\mathbf{Spt}_T^{\Sigma}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda))) \underset{\mathrm{o_{tr}}}{\overset{\mathrm{a_{tr}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Spt}^{\Sigma}_{\mathrm{a_{tr}}(T)}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PST}(\mathsf{Sm}/B, \Lambda)))$$

relativement aux structures $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales stables. □

Lorsque la base B est de dimension nulle, on peut se débarrasser de l'hypothèse sur Λ grâce à un joli résultat de Röndigs et Østvær [40].

Corollaire B.14. *Soit k un corps de caractéristique nulle. La conclusion du théorème* B.13 *est vraie pour $B = \mathrm{Spec}(k)$ sans condition sur Λ.*

Démonstration. On travaillera avec les T_k-spectres et les T_k^{tr}-spectres non symétriques de sorte que le foncteur $\mathrm{o_{tr}}$ préserve les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales stables (cf. lemme 2.112). Il suffit de montrer que $\mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est pleinement fidèle, i.e., que l'unité $\mathrm{id} \to \mathrm{o_{tr}} \circ \mathsf{La}_{\mathrm{tr}}$ est inversible. On ne restreint donc pas le généralité en supposant que k est algébriquement clos.

Le théorème B.13 étant démontré pour $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$, un dévissage standard nous ramène au cas $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$ avec ℓ un nombre premier. Soit $\mathbf{E}$ un objet cofibrant et fibrant de $\mathbf{Spt}_{T_k}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathsf{Sm}/k, \mathbb{Z}/\ell)))$ munie de sa structure projective $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable. Par [40, Theorem 1.1], pour toute extension algébriquement close K/k, le morphisme $\mathbf{E}_n(k) \to \mathbf{E}_n(K)$ est un quasi-isomorphisme. Par le lemme B.15 ci-dessous et le fait que $\mathbf{E}_n(k)_{\mathrm{cst}}$ est un préfaisceau $\mathbb{A}^1$-local, on déduit que le morphisme de complexes de préfaisceaux $\mathbf{E}_n(k)_{\mathrm{cst}} \to \mathbf{E}_n$ est une équivalence ét-locale. Il en est donc de même du morphisme $\mathbf{E}_n(k)_{\mathrm{cst}} = \mathrm{a_{tr}}(\mathbf{E}_n(k)_{\mathrm{cst}}) \to \mathrm{a_{tr}}(\mathbf{E}_n)$. Ceci montre aussitôt que les morphismes $\mathbf{E}_n \to \mathrm{o_{tr}}\,\mathrm{a_{tr}}(\mathbf{E}_n)$ sont des équivalences ét-locaux. □

Lemme B.15. *Soient k un corps parfait et M un complexe de préfaisceaux sur Sm/k. On suppose que M est $\mathbb{A}^1$-local et que pour toute extension séparablement close K de k, on a $M(K) \simeq 0$ dans $\mathbf{D}(\Lambda)$. Alors, $M \simeq 0$ dans $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff,ét}}(k, \Lambda)$.*

Démonstration. On peut supposer que M est projectivement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-fibrant. Soit K une extension de type fini de k et K^s une clôture séparable de K. La formule

$$M(K) \simeq \mathsf{R}\Gamma(\mathrm{Gal}(K^s/K), M(K^s))$$

montre que le complexe $M(K)$ est contractile. Dans la suite, nous allons considérer M comme un objet de $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$, la catégorie des motifs sans transferts et pour la topologie Nisnevich, et nous montrerons que M est isomorphe à l'objet nul dans cette catégorie.

Par le théorème de $\mathbb{A}^1$-connexité [33], les foncteurs de troncations de la t-structure usuelle sur $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathsf{Sm}/k, \Lambda))$ préservent la sous-catégorie $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$. Ils induisent donc une t-structure sur cette dernière. Elle est appelée la t-structure homotopique et son cœur est canoniquement équivalent à la catégorie des faisceaux Nisnevich strictement invariants par homotopie. Il suffit donc de montrer que les faisceaux Nisnevich $\mathrm{h}_i(M) = \mathrm{a}_{\mathrm{Nis}}\mathrm{H}_i(-, M)$ sont nuls pour tout $i \in \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, on sait que $\mathrm{h}_i(M)(K) = 0$ pour toute extension de type finie K de k. Or, si F est un faisceau Nisnevich strictement invariant par homotopie, les morphismes de restrictions $F(X) \to F(U)$ sont injectifs pour toute immersion ouverte d'image dense $U \hookrightarrow X$. (On se ramène pour cela au cas où $Z = X - U$ est lisse de faisceau normal libre de rang $d \geq 1$. On a alors par pureté une suite exacte

$$\hom_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Z)(d)[2d], F) \to F(X) \to F(U).$$

Le membre de gauche est nul. En effet, $\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Z)(d)[2d] \simeq [Z \times_k (\mathbb{G}\mathrm{m}_k, 1)^{\wedge d}] \otimes \Lambda[d]$ est strictement positif pour la t-structure homotopique alors que F est négatif.) Ceci entraîne que les $\mathrm{h}_i(M)$ sont nuls. □

Références

[1] *Y. André*, Pour une théorie inconditionnelle des motifs, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **83** (1996), 5–49.

[2] *Y. André*, Galois theory, motives and transcendental numbers, in: Renormalization and Galois theories, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **15**, European Mathematical Society, Zürich (2009), 165–177.

[3] *Y. André* and *B. Kahn*, Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (2002), 989–994.

[4] *J. Ayoub*, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique, I, Astérisque **314**, Société Mathématique de France, 2007.

[5] *J. Ayoub*, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique, II, Astérisque **315**, Société Mathématique de France, 2007.

[6] *J. Ayoub*, Les motifs des variétés analytiques rigides, preprint (2008).

[7] *J. Ayoub*, Note sur les opérations de Grothendieck et la réalisation de Betti, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), 225–263.

[8] *J. Ayoub*, L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II, J. reine angew. Math. **693** (2014), 151–226.

[9] *S. Bloch*, Algebraic cycles and higher K-theory, Adv. Math. **61** (1986), 267–304.

[10] *N. Bourbaki*, Algèbre homologique, Éléments de Mathématiques, Algèbre, Chapitre 10, Masson, Paris 1980.

[11] *R. Brown* and *P. J. Higgins*, On the algebra of cubes, J. Pure Appl. Algebra **21** (1981), 233–260.

[12] *H. G. Dales*, The ring of holomorphic functions on a Stein compact set as a unique factorization domain, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 88–92.

[13] *F. Déglise* and *D.-C. Cisinski*, Triangulated categories of mixed motives, preprint (2009).

[14] *F. Déglise* and *D.-C. Cisinski*, Mixed Weil cohomologies, Adv. Math. **230** (2012), 55–130.

[15] *P. Deligne*, *J. Milne*, *A. Ogus* and *K. Shih*, Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Lecture Notes in Math. **900**, Springer, 1982.

[16] *J. Frisch*, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, Invent. Math. **4** (1967), 118–138.

[17] *P. G. Goerss* and *J. F. Jardine*, Simplicial homotopy theory, Progr. Math. **174**, Birkhäuser, Basel 1999.

[18] *M. Grandis* and *L. Mauri*, Cubical sets and their site, Theory Appl. Categ. **11** (2003), 185–211.

[19] *H. Grauert* and *R. Remmert*, Coherent analytic sheaves, Grundlehren Math. Wiss. **265**, Springer, Berlin 1984.

[20] *A. Grothendieck*, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **29** (1966), 95–103.

[21] *A. Grothendieck* and *J. Dieudonné*, Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **28** (1966), 5–255.

[22] *A. Grothendieck* et al., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer, 1972–73.

[23] *J. Hähne*, Semistabile symmetrische Spektren in der $\mathbb{A}^1$-Homotopietheorie, Diplomarbeit, `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~hornbost/haehne.pdf`.

[24] *U. Jannsen*, Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.

[25] *J. P. Jouanolou*, Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique, in: Higher K-theories, vol. I, Lecture Notes in Math. **341**, Springer (1973), 293–316.
[26] *M. Kontsevich* and *D. Zagier*, Periods, in: Mathematics unlimited 2001 and beyond, Springer, Berlin (2001), 771–808.
[27] *M. Levine*, Bloch's higher Chow groups revisited, in: K-theory (Strasbourg 1992), Astérisque **226**, Société Mathématique de France (1994), 235–320.
[28] *M. Levine*, Mixed motives, Math. Surveys Monogr. **57**, American Mathematical Society, Providence 1998.
[29] *M. Levine*, Mixed motives, in: Handbook of K-theory, vol. 1, Springer (2005), 429–521.
[30] *M. Levine*, Smooth motives, in: Motives and algebraic cycles, Fields Inst. Commun. **56**, American Mathematical Society, Providence (2009), 175–231.
[31] *H. Matsumura*, Commutative algebra, 2nd ed., The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.
[32] *C. Mazza*, *V. Voevodsky* and *C. Weibel*, Lecture notes on motivic cohomology, Clay Math. Monogr. **2**, American Mathematical Society, Providence 2006.
[33] *F. Morel*, The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems, K-theory **35** (2005), 1–68.
[34] *F. Morel*, Rational stable splitting of Grassmanians and the rational motivic sphere spectrum, preprint (2006).
[35] *F. Morel* and *V. Voevodsky*, $\mathbb{A}^1$-Homotopy theory of schemes, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **90** (1999), 45–143.
[36] *M. Nagata*, On the purity of branch loci in regular local rings, Illinois J. Math. **3** (1959), 328–333.
[37] *D.-M. Popescu*, General Néron desingularization, Nagoya Math. J. **100** (1985), 97–126.
[38] *D.-M. Popescu*, General Néron desingularization and approximation, Nagoya Math. J. **104** (1986), 85–115.
[39] *J. Riou*, Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (I) **340** (2005), 431–436.
[40] *O. Röndigs* and *P.-A. Østvær*, Rigidity in motivic homotopy theory, Math. Ann. **341** (2008), 651–675.
[41] *N. R. Saavedra*, Catégories Tannakiennes, Lecture Notes in Math. **265**, Springer, 1972.
[42] *S. Schwede*, An untitled book project about symmetric spectra, preprint (2007), `www.math.uni-bonn.de/~schwede/SymSpec.pdf`.
[43] *J.-P. Serre*, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier **6** (1956), 1–42.
[44] *M. Spivakovsky*, A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 381–444.
[45] *J.-L. Verdier*, Des catégories dérivées des catégories abéliennes, Astérisque **239**, Société Mathématique de France, 1996.
[46] *V. Voevodsky*, *A. Suslin* and *E.-M. Friedlander*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud. **143**, Princeton University Press, Princeton 2000.
[47] *C. Weibel*, An introduction to homological algebra, Cambridge University Press, 1994.

Joseph Ayoub, Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, 8057 Zürich, Switzerland
e-mail: joseph.ayoub@math.uzh.ch

Eingegangen 28. April 2011, in revidierter Fassung 4. September 2012